Справочник по математике

А. А. РЫВКИН
А. З. РЫВКИН
Л. С. ХРЕНОВ

Справочник по математике

А. А. РЫВКИН, А. З. РЫВКИН, Л. С. ХРЕНОВ

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

для учащихся-заочников
средних специальных учебных заведений

Под общей редакцией проф.-доктора *Л. С. Хренова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1964

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3
Латинский и греческий алфавит 5
Математические обозначения 6

Часть первая

СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

I. АРИФМЕТИКА

А. Натуральные числа

1. Действия над натуральными числами 11
2. Порядок действий. Скобки 12
3. Десятичная система счисления 13
4. Двоичная система счисления 14
5. Троичная система счисления 18
6. Восьмеричная система счисления 19
7. Делимость чисел 21
8. Простые и составные числа. Общие делители и общие кратные 22

Б. Рациональные числа

а) Простые дроби

1. Определения. Свойства дробей 24
2. Сравнение дробей 25
3. Действия над дробями 26
4. Пропорции 27
5. Средние величины 30

б) Десятичные дроби. Проценты. Двоичные дроби

1. Определение 32
2. Действия над десятичными дробями 32
3. Обращение десятичной дроби в простую и простой в десятичную 33
4. Периодические дроби 34
5. Проценты 35
6. Двоичные дроби 36

II. АЛГЕБРА

А. Расширение понятия о числе

а) Действительные числа

1. Числовая ось. Отрицательные числа 38
2. Иррациональные числа 39
3. Алгебраические и трансцендентные числа . . . 40
4. Действия над действительными числами . . . 41

б) Комплексные числа

1. Определения. Действия над комплексными числами 42
2. Геометрическое истолкование 44
3. Тригонометрическая форма 44
4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме 47

Б. Алгебраические выражения

а) Степени и корни

1. Определения 49
2. Действия над степенями 50
3. Внесение множителя из-под радикала 51
4. Исключение иррациональности в дроби . . . 52
5. Формула сложного радикала 53

б) Многочлены

1. Определения. Действия над многочленами . . . 54
2. Формулы сокращенного умножения и деления . 55
3. Деление многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера 56
4. Разложение многочлена на множители 58

в) Алгебраические дроби

1. Определения. Свойства 59
2. Действия с алгебраическими дробями 60
3. Разложение на простейшие дроби 61

В. Уравнения

а) Общие сведения

1. Равенства. Тождества. Уравнения. 65
2. Классификация уравнений 66
3. Равносильные уравнения 67

б) Алгебраические уравнения с одним неизвестным

1. Уравнение первой степени (линейное) 71
2. Уравнение второй степени (квадратное) 71
3. Уравнение третьей степени (кубичное) 73
4. Уравнение четвертой степени 75
5. Биквадратное уравнение 76
6. Возвратное уравнение четвертой степени . . . 76
7. Двучленное уравнение 78
8. Уравнение n-й степени 78
9. Трехчленное уравнение 79
10. Дробное уравнение 79
11. Иррациональные уравнения 79

в) Трансцендентные уравнения

1. Показательные уравнения 82
2. Логарифмические уравнения 84

г) Системы алгебраических уравнений

1. Метод Гаусса исключения неизвестных 84
2. Определители 89
3. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными 91
4. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными 93
5. Простейшие системы, содержащие уравнения второй степени 95

Г. Неравенства

а) Общие сведения

1. Определения 99
2. Свойства и преобразования неравенств 99
3. Система и совокупность неравенств 100

б) Решение неравенств

1. Неравенство первой степени (линейное) 100
2. Неравенство n-й степени 101
3. Неравенство второй степени (квадратное) . . . 102
4. Некоторые важные неравенства 102

Д. Числовые последовательности

1. Понятие последовательности. Примеры 104
2. Арифметическая прогрессия 105
3. Геометрическая прогрессия 106
4. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 107

Е. Логарифмы

1. Определение 107
2. Свойства логарифмов 107
3. Десятичные логарифмы 110

Ж. Комбинаторика. Бином Ньютона

1. Перестановки. Размещения. Сочетания 111
2. Бином Ньютона 114
3. Свойства разложения по формуле бинома Ньютона 115

З. Элементы математической логики

а) Множества

1. Определения. Действия над множествами . . . 116
2. Некоторые свойства множеств 116
3. Алгебра символической логики 118

б) Математическая индукция

1. Определение 122
2. Примеры 123
3. Замечания 125

в) Аксиомы, теоремы, следствия

1. Определения 126
2. Прямая и обратная теоремы. Необходимость и достаточность 127

III. ГЕОМЕТРИЯ

А. Плоские фигуры

а) Углы

1. Определения 128
2. Градусная мера углов 128
3. Радианная мера углов 128
4. Классификация углов 129
5. Углы при параллельных прямых 129

б) Треугольник

1. Обозначения, основные свойства 130
2. Высота, медиана, биссектриса 131
3. Вписанная и вневписанная окружности 132
4. Описанная окружность 134
5. Центр тяжести, ортоцентр 134
6. Площадь треугольника 134
7. Частные случаи треугольников 135

в) Четырехугольник

1. Обозначения, основные свойства 137
2. Частные случаи четырехугольников 138

г) Многоугольник

1. Основные свойства 142
2. Правильные многоугольники 142
3. Соотношения в правильных многоугольниках . . 143

д) Круг

1. Элементы круга 146
2. Углы и окружность 146
3. Пропорциональные отрезки 148
4. Соотношения 148

Б. Задачи на построение

а) Элементарные построения

1. Перпендикуляр к отрезку в его середине . . . 149
2. Угол, равный данному 149
3. Прямая, параллельная данной 149
4. Биссектриса угла 150

5. Четвертый пропорциональный отрезок 150
6. Средний пропорциональный отрезок 150
7. Деление отрезка на равные части 151
8. Перпендикуляр в конце луча 151
9. Золотое сечение 151
10. Сегмент, вмещающий данный угол 152
11. Касательная к окружности 152
12. Общая касательная к двум окружностям . . . 153

б) Построение треугольника

1. По трем сторонам 153
2. По двум сторонам и углу между ними 153
3. По стороне и прилежащим к ней углам . . . 153
4. По трем медианам 154

в) Построение правильных многоугольников

1. Треугольник и шестиугольник 154
2. Квадрат и восьмиугольник 154
3. Пятиугольник и десятиугольник 154

В. Геометрические преобразования

1. Параллельный перенос 155
2. Осевая симметрия 156
3. Подобие. Центральная симметрия 157

Г. Выпуклые фигуры в пространстве

1. Прямые и плоскости. Углы 159
2. Многогранники 160
3. Правильные многогранники 162
4. Цилиндр, конус 164
5. Шар 166
6. Фигуры вращения 168

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

А. Тригонометрические функции

1. Определения и свойства 170
2. Основные соотношения 171
3. Теоремы сложения 174

Б. Обратные тригонометрические функции

1. Определения. Главные значения 178
2 Основные соотношения 180

В. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие уравнения 183
2. Распадающиеся тригонометрические уравнения . 184
3. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим . . 185

Г. Решение прямоугольных треугольников

1. Основные теоремы и формулы 186
2 Прямоугольные треугольники 188
3. Косоугольные треугольники 188

Д. Решение сферических треугольников

1. Основные понятия и определения 190
2. Основные формулы 191
3. Прямоугольные треугольники 192
4. Косоугольные треугольники 192

Часть вторая

СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

А. Метод координат и простейшие задачи

1. Декартова прямоугольная система координат . . 196
2. Расстояние между двумя точками 197
3. Деление отрезка в данном отношении 198
4. Преобразование декартовых координат 199
5. Полярные координаты 200
6. Переход от полярных координат к декартовым и обратно 200
7. Уравнение линии 201

Б. Прямая линия

1. Уравнение прямой 202
2. Угол между двумя прямыми 206
3. Пересечение двух прямых 208

В. Кривые второго порядка

1. Окружность 209
2. Эллипс 211
3. Гипербола 213
4. Парабола 217
5. Общие свойства кривых второго порядка . . . 220

Г. Некоторые замечательные кривые 221

Д. Векторы

1. Определения 227
2. Сложение и вычитание векторов 228
3. Проекции вектора на оси координат 228
4. Умножение вектора на число. Скалярное произведение двух векторов 229

II. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

А. Основы теории пределов

1. Абсолютная величина числа 230
2. Функция 231
3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины 242
4. Предел функции 244
5. Непрерывность функции 247

Б. Основы дифференциального исчисления

1. Производная 248
2. Основные правила и формулы дифференцирования 251
3. Исследование функций с помощью производной 255
4. Дифференциал 262

В. Основы интегрального исчисления

1. Неопределенный интеграл 266
2. Основные правила, формулы и способы интегрирования 267
3. Таблица неопределенных интегралов 276
4. Определенный интеграл 286
5. Простейшие дифференциальные уравнения . . . 294

Г. Бесконечные ряды

1. Числовые ряды 296
2. Функциональные ряды 300
3. Таблица разложения некоторых функций в ряд Маклорена 302
4. Ряды Фурье 304

Часть третья

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А. Приближенные вычисления

1. Определения 310
2. Значащие цифры и верные знаки 311
3. Оценка точности приближенных чисел 312
4. Округление чисел 312
5. Правила действий с приближенными числами. . 313
6. Приближенные формулы 316

Б. Ошибки и оценка точности результатов измерений

1. Методы и ошибки измерений 318
2. Среднее арифметическое (арифметическая середина) 319
3. Оценка точности результатов непосредственных измерений 320
4. Ошибки функций измеренных величин 324

В. Способы и средства вычислений

1. Формула, алгорифм, схема 327
2. Выражение углов в разных мерах 328
3. Средства вычислений 329
4. Таблицы 332
5. Счеты 335
6. Логарифмическая линейка 337
7. Малые вычислительные машины 342

Г. Графическое решение уравнений

1. Уравнение с одним неизвестным 360
2. Уравнение с двумя неизвестными 360

Д. Графическое дифференцирование и интегрирование. Формулы для приближенного интегрирования

1. Графическое дифференцирование 361
2. Приближенное вычисление определенных интегралов 361
3. Графическое интегрирование 362

Е. Приближенное решение уравнений

1. Метод проб 365
2. Метод хорд 365
3. Метод касательных 366

ТАБЛИЦЫ

1. Степени, корни, длины окружностей, площади кругов и обратные величины 369
2. Степени некоторых чисел 389
3. Числа $\frac{n}{\pi}$ и $\frac{\pi}{n}$ 390
4. Числа $\frac{n}{M}$ и $\frac{M}{n}$ 391
5. Числа кратные и обратные e 391
6. Простые числа 392
7. Некоторые несократимые дроби 393
8. Квадратные и кубические корни из некоторых дробей 394
9. Длина дуги круга радиуса $R=1$ 395
10. Объем шара V для диаметра D от 1 до 120 . 396
11. Элементы сегмента круга 397
12. Длина дуги и площадь сегмента для хорды $a=1$ 404
13. Элементы правильных многоугольников . . . 405
14. Факториалы, обратные им величины и логарифмы 406
15. Мантиссы десятичных логарифмов чисел . . . 407
16. Антилогарифмы чисел 411
17. Десятичные логарифмы тригонометрических функций для углов в градусной мере 415
18. Десятичные логарифмы тригонометрических функций для углов в радианной мере 429
19. Натуральные логарифмы чисел 433
20. Значения величин для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно . . . 437
21. Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90°, через каждые 10′ 438

22. Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90°, через каждые 0°,1 453
23. Натуральные значения тригонометрических функций для углов в радианной мере . . . 474
24. Обратные тригонометрические функции . . . 478
25. Перевод углов из градусной меры в радианы . 481
26. Перевод радианов в градусную меру 482
27. Пропорциональные части 483
28. Постоянные величины и их логарифмы . . . 487
29. Метрическая система мер 488
Таблица перевода десятичных дробей в двоичные 491
Алфавитный указатель 495

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий справочник по математике полностью включает материал, предусмотренный программами для средних специальных учебных заведений самого различного профиля. В нем найдут много полезного для себя и техники, и учащиеся средней школы, и все те, кто после нескольких лет перерыва в учебе готовится к конкурсным экзаменам в институт.

Весь материал справочника подразделяется на три части, содержащие сведения из элементарной и высшей математики, а также элементы приближенных вычислений, механизации вычислительных работ, численных и графических методов математического анализа.

В справочнике помещены и различные численные и переводные таблицы; большинство из них может быть использовано при прохождении математического практикума.

Средства вычислений, используемые для механизации вычислительных работ, теперь широко используются техниками в их практической работе, и поэтому в ряде средних специальных учебных заведений эти вопросы включены в программы учебных занятий.

Сведения теоретического характера, изложенные в справочнике, ни в коей мере не претендуют на полноту. В справочнике преимущественно даны лишь ос-

новные понятия и определения, сопровождаемые примерами, а в некоторых случаях и небольшими пояснениями. Все это особенно важно для учащихся техникумов системы заочного образования.

При отборе сведений для справочника имелось в виду включить в него вопросы, с которыми техник может встретиться в своей практической работе на производстве, а также и материал, который может понадобиться технику при подготовке к поступлению в высшее учебное заведение.

Для наведения точной справки читателю рекомендуется обращаться к предметному указателю, помещенному в конце справочника.

Первая часть справочника написана А. А. Рывкиным, вторая часть и разделы Г, Д, Е третьей части написаны А. З. Рывкиным. Глава Д из раздела IV первой части, разделы А, Б, В из третьей части, а также все таблицы написаны Л. С. Хреновым.

Авторы выражают глубокую признательность Л. Я. Цлафу и Т. К. Ширяевой за ценные советы по улучшению книги.

Отзывы и замечания по этому справочнику будут приняты авторами с благодарностью.

Проф.-доктор *Л. С. Хренов*

Латинский алфавит

Aa — а
Bb — бе
Cc — це
Dd — де
Ee — е
Ff — эф
Gg — же
Hh — аш
Ii — и
Jj — йот
Kk — ка
Ll — эль
Mm — эм
Nn — эн
Oo — о
Pp — пе
Qq — ку
Rr — эр
Ss — эс
Tt — тэ
Uu — у
Vv — ве
Ww — дубль-ве
Xx — икс
Yy — игрек
Zz — зет

Греческий алфавит

Αα — альфа
Ββ — бета
Γγ — гамма
Δδ — дельта
Εε — эпсилон
Ζζ — дзета
Ηη — эта
Θϑθ — тэта
Ιι — йота
Κκ — каппа
Λλ — ламбда
Μμ — ми
Νν — ни
Ξξ — кси
Οο — омикрон
Ππ — пи
Ρρ — ро
Σσ — сигма
Ττ — тау
Υυ — ипсилон
Φφ — фи
Χχ — хи
Ψψ — пси
Ωω — омега

Математические обозначения

Обозначения соотношений

$=$ равно	$a = b$
$\equiv$ тождественно или тождественно равно	$a \equiv b$
$\neq$ не равно	$a \neq b$
$\approx$ приближенно равно	$a \approx b$
$<$ меньше	$a < b$
$>$ больше	$a > b$
$\leqslant$ меньшее или равно	$a \leqslant b$
$\geqslant$ большее или равно	$a \geqslant b$
$\ll$ мало сравнительно с (значительно меньше)	$a \ll b$
$\gg$ велико сравнительно с (значительно больше)	$a \gg b$

Алгебра

$\lvert\ \rvert$	абсолютная величина числа	$\lvert a \rvert$
$+$ (плюс)	сложение	$a + b$
$-$ (минус)	вычитание	$a - b$
$\cdot$ или $\times$	умножение	$a \cdot b$
	знак умножения часто не ставится перед числом, обозначенным буквой, и перед скобками	или $a \times b$ ab $(a + b)(c + d)$
: или —	деление	$a : b$ или $\frac{a}{b}$

a^m a в степени m	
$\sqrt{}$ квадратный корень	$\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{}$ корень n-й степени ($n \neq 2$),	$\sqrt[n]{a}$
i мнимая единица	$(i = \sqrt{-1})$
$\log_b a$ логарифм числа a по основанию b	$\log_2 8 = 3$
$\lg a$ логарифм числа a по основанию 10 (десятичный логарифм)	$\lg 100 = 2$
$\ln a$ натуральный логарифм числа a (логарифм по основанию $e \approx 2{,}71828183$)	
( ), [ ], { } скобки: круглые, квадратные и фигурные	
$n!$ факториал ($5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$)	

Геометрия

$\triangle$ треугольник	$\triangle ABC$
$\angle$ или $\measuredangle$ плоский угол	$\angle ABC$ или $\measuredangle ABC$
$\smile$ дуга	$\smile AB$ или AB
AB, $\overline{AB}$ отрезок прямой между точками A и B	
$\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}$ обозначение векторов	
$\perp$ перпендикулярно	$AB \perp CD$
$\parallel$ параллельно	$AB \parallel CD$
$\#$ равно и параллельно	$AB \# CD$
$\backsim$ подобно	$\triangle ABC \backsim \triangle DFE$
$\uparrow\uparrow$ параллельно и одинаково направлено	$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$
$\uparrow\downarrow$ параллельно и направлено в противоположные стороны	$\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$
$^\circ$ градус	
$'$ минута \ плоского угла	
$''$ секунда / или дуги	$13^\circ 7' 40''$.

Примечание. Если обозначение $^\circ$ (градус), $'$ (минута) или $''$ (секунда) относятся к числу, содержащему десятичную дробь, то оно ставится над запятой

$2^\circ 34{,}16$ или $135^\circ 18' 12{,}9$.

Тригонометрические и гиперболические функции

$\sin x$ синус x
$\cos x$ косинус x
$\operatorname{tg} x$ тангенс x
$\operatorname{ctg} x$ котангенс x
$\sec x$ секанс x
$\operatorname{cosec} x$ косеканс x
$\operatorname{Arcsin} x$ арксинус x — величина (например, дуга), синус которой равен x
$\operatorname{Arccos} x$ арккосинус x — величина (например, дуга), косинус которой равен x
$\operatorname{Arctg} x$ арктангенс x — величина (например, дуга), тангенс которой равен x
$\operatorname{Arcctg} x$ арккотангенс x — величина (например, дуга), котангенс которой равен x
$\arcsin x$ арксинус x (главное значение)
$\arccos x$ арккосинус x (главное значение)
$\operatorname{arctg} x$ арктангенс x (главное значение)
$\operatorname{arcctg} x$ арккотангенс x (главное значение)
$\operatorname{sh} x$ синус гиперболический x
$\operatorname{ch} x$ косинус гиперболический x
$\operatorname{th} x$ тангенс гиперболический x
$\operatorname{cth} x$ котангенс гиперболический x
$\sin^2 x$ синус квадрат икс, показатель степени тригонометрической функции ставится при знаке функции

Математический анализ

a, b, c, постоянные величины (преимущественно первые буквы латинского алфавита)
x, y, z, переменные величины (преимущественно последние буквы латинского алфавита)
$f()$, $F()$, $\varphi()$, $y()$ функции одного или нескольких переменных (аргументов), $f(x)$, $F(x, y)$ и т. д.
$\to$ стремится к ..., $x \to \infty$
∞ бесконечность

$\lim$ — предел $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$

Δ приращение (греческая буква дельта) Δx или Δy

$\alpha = o(\beta)$ α есть бесконечно малая по сравнению с β,

$\beta = O(\gamma)$ величины β и γ одного порядка

d дифференциал dy

d_x, d_y, ... частный дифференциал $d_y u$

$\sum_{i=1}^{n} p_i$ сумма, в которой i изменяется от 1 до n $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$

f', f'', f''', f^{IV}, f^{V} обозначение последовательных производных от функции $y = f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$.

Если порядок производной обозначается буквой или арабской цифрой, то эта буква или цифра ставится в скобки $f^{(n)}(x)$, $f^{(3)}(y)$

$\frac{d}{dx}$ символ первой производной функции одного переменного x $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$;

$\frac{d^n}{dx^n}$ символ производной n-го порядка (при $n>1$) функции одного переменного x $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$

$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}$, $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ — частные производные функции f нескольких переменных x, y, z, ... по соответствующим переменным

$\int f(x)dx$ неопределенный интеграл функции $f(x)$

$\int_a^b f(x)dx$ определенный интеграл функции $f(x)$, взятый в пределах от a (нижний предел) до b (верхний предел)

$\Big|_a^b$ знак двойной подстановки $\qquad f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a)$

Элементы теории множеств и логики

$\in$ принадлежит $\qquad x \in A;$

$\subset$ или $\supset$ включение $\qquad A \subset B$, т. е. $B \supset A;$

$\varnothing$ пустое множество

$\cap$ пересечение множеств

$\cup$ объединение множеств

$\overline{A}$ дополнение множества A (отрицание высказывания A)

$\vee$ дизъюнкция высказываний

$\wedge$ конъюнкция высказываний

$\sim$ эквивалентность

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

I. АРИФМЕТИКА

А. Натуральные числа

1. Действия над натуральными числами. Числа 1, 2, 3, ..., появившиеся в результате счета, называются *натуральными*. Для них определены следующие арифметические действия:

Название действия	Пример	Составляющие
Сложение	$31+12=43$	31 и 12 — слагаемые 43 — сумма
Вычитание (действие, обратное сложению)	$43-12=31$	43 — уменьшаемое 12 — вычитаемое 31 — разность
Умножение	$12\cdot 5=60=12+12+12+12+12=5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60$	12 и 5 — сомножители 60 — произведение
Деление (действие, обратное умножению; *деление на нуль невозможно*)	$60:12=5$ $\frac{60}{12}=5$	60 — делимое 12 — делитель 5 — частное
Возведение в степень — умножение одинаковых сомножителей (показатель степени — число сомножителей)	$3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$	3 — основание степени 4 — показатель степени 81 — степень
Извлечение корня — действие, обратное возведению в степень	$\sqrt[4]{81}=3$	81 — подкоренное число 4 — показатель корня 3 — корень

Действия сложения и умножения обладают свойствами переместительности, сочетательности и распределительности; подробнее см. стр. 41.

2. Порядок действий. Скобки. При любой записи действий над числами установлен определенный порядок вычислений:

1) сначала производят все действия с величинами, заключенными в скобки (начиная с внутренних, если скобок несколько);

2) затем последовательно выполняют возведение в степень, деление, умножение и в последнюю очередь сложение и вычитание.

Действия сложения и вычитания, а также несколько умножений или несколько подряд идущих делений следует производить в порядке их записи.

Если хотят, чтобы порядок действий в какой-нибудь записи отличался от установленного, то употребляют скобки.

Математические выражения заключают последовательно в круглые (...), квадратные [...(...)...] и фигурные {...[...(...)...]...} скобки.

Пример. Вычислить

$$\{[9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + (3^2 - 21 : 7)^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Выполняем действия во внутренних скобках:

$$3^2 - 21 : 7 = 9 - 3 = 6. \quad 2 \cdot 6 = 12$$

Переписываем пример без этих скобок:

$$\{[9 \cdot 4^2 : 12 + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Выполняем действия в квадратных скобках, соблюдая порядок действий:

$$9 \cdot 16 : 12 + 36 + 125 \cdot 8 : 100 =$$

$$= 144 : 12 + 36 + 1000 : 100 = 12 + 36 + 10 = 58.$$

Наконец выполняем последние действия:

$$\{58 : 29\} \cdot 2 = 4.$$

Иногда деление обозначают чертой и производят вычисления, предварительно сократив дроби:

$$9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100 =$$

$$= \frac{9 \cdot 4^2}{2 \cdot 6} + 6^2 + \frac{5^3 \cdot 2^3}{100} = 3 \cdot 4 + 36 + 5 \cdot 2 = 58.$$

Деление, обозначенное чертой, выполняют после вычисления выражений, стоящих в числителе и в знаменателе.

Знак извлечения корня рассматривается как запись при помощи скобок.

При возведении в степень сначала выполняют действия, указанные в показателе степени:

$$2^{2^5} = 2^{32}.$$

Если требуется указать иной порядок действий, то употребляют скобки:

$$(2^2)^5 = 4^5 = 2^{10}.$$

Замечание. В отношении того, какое из действий — деление или умножение выполняется раньше, существует разногласие, хотя это весьма принципиальный вопрос. В самом деле, например:

$$36 : 2 \cdot 6 = 36 : 12 = 3,$$

$$36 : 2 \cdot 6 = 18 \cdot 6 = 108.$$

Поэтому во избежание путаницы рекомендуется в подобных случаях употреблять скобки (для указания порядка действия) и писать:

$$36 : (2 \cdot 6) = 3,$$

$$(36 : 2) \cdot 6 = 108.$$

3. Десятичная система счисления. Наиболее употребительна запись чисел при помощи *позиционной десятичной системы счисления*. В основании системы лежит число десять. Это означает, что счет ведется *единицами, десятками*, десятками десятков — *сотнями*, десятками сотен — *тысячами* и т. д. Для записи используются десять значков — *цифр*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Одна и та же цифра может иметь разные значения в зависимости от места, которое она занимает в записи числа. Так, на первом месте справа она означает количество единиц, на втором — количество десятков, на третьем — количество сотен и т. д. В этом и заключается *позиционность* системы.

При записи число подразделяют, на разряды и классы.

Разряд	Класс
единиц десятков сотен	единиц
тысяч десятков тысяч сотен тысяч	тысяч
миллионов десятков миллионов сотен миллионов	миллионов

Далее идут классы миллиардов, триллионов и т. д.

В десятичной системе счисления каждое число может быть записано в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Пример:

$$3845 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Число 10 было избрано в качестве основания системы счисления, потому что человеку, имеющему на руках десять пальцев, оно казалось наиболее удобным. С точки зрения математики этот выбор чисто случаен. Ничто не мешает нам рассматривать систему счисления, в которой в качестве основания взято 2, 3, 7, 12, 17 и вообще любое целое число, большее единицы.

В системе счисления с основанием p (она называется *p-ичной*) будет p цифр, а каждое число запишется в виде

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0.$$

4. Двоичная система счисления. Основание — число 2. Для записи используются лишь две цифры: 0 и 1; этим объясняется широкое применение двоичной системы в вычислительных машинах.

Записать число в двоичной системе счисления — значит представить его в виде суммы степеней числа 2. Для перевода числа из любой системы счисления в двоичную делят данное число на 2 и записывают остаток (0 или 1), результат снова делят на 2 и новый остаток записывают слева от первого и т. д. Когда в частном получается 1, то она приписывается слева

к последовательности остатков, и эта последовательность превращается в двоичную запись данного числа.

Пример 1. Число 23 записать в двоичной системе счисления.

Осуществляя последовательное деление на 2, располагаем результаты справа налево и записывая остатки под делимым, получаем следующую форму записи:

1	2	5	11	23
1	0	1	1	1

Итак, $23_{10} = 10\,111_2$.

Пример 2. Записать в двоичной системе счисления число 65 600.

Вычисления запишутся в следующем виде:

1025	2050	4100	8200	16400	32800	65600
1	0	0	0	0	0	0

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Итак,

$$65\,600_{10} = 10\,000\,000\,001\,000\,000_2.$$

Для сокращения вычислений и приблизительной оценки числа удобно пользоваться табл. 1. Получив на некотором этапе число, содержащееся в этой таблице и соответствующее некоторому n, приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам n нулей и единицу.

Таблица 1

Последовательные степени числа 2

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	10	1024	20	1 048 576
1	2	11	2048	21	2 097 152
2	4	12	4096	22	4 194 304
3	8	13	8192	23	8 388 608
4	16	14	16 384	24	16 777 216
5	32	15	32 768	25	33 554 432
6	64	16	65 536	26	67 108 864
7	128	17	131 072	27	134 217 728
8	256	18	262 144	28	268 435 456
9	512	19	524 288	29	536 870 912

Таблица 2

Двоичные представления чисел от 64 до 128 (от 2^6 до 2^7)

Десятичная запись		Двоичная запись		Десятичная запись	
64	**80**	***	0000	**96**	**112**
65	81	***	0001	97	113
66	82	***	0010	98	114
67	83	***	0011	99	115
68	84	***	0100	100	116
69	85	***	0101	101	117
70	86	***	0110	102	118
71	87	***	0111	103	119
72	88	***	1000	104	120
73	89	***	1001	105	121
74	90	***	1010	106	122
75	91	***	1011	107	123
76	92	***	1100	108	124
77	93	***	1101	109	125
78	94	***	1110	110	126
79	95	***	1111	111	127
	64	100	0000		
	80	101	0000		
	96	110	0000		
	112	111	0000		
	128	1000	0000		

Значительно упрощает перевод чисел из десятичной системы в двоичную табл. 2, в которую сведены двоичные представления всех чисел от 64 до 128, т. е. от 2^6 до 2^7. Чтобы найти, например, двоичную запись числа 91, нужно к четырем цифрам, стоящим после черты против этого числа, приписать вместо звездочек первые три цифры из двоичного представления числа

80, возглавляющего столбец. Двоичные записи этих „заглавных" чисел помещены отдельно внизу таблицы и тоже разделены чертой.

Итак, $91_{10} = 1011011_2$. Аналогично $117_{10} = 1110101$.

Пример 3. Записать число 65 600 в двоичной системе, используя табл. 1.

Осуществляем последовательное деление числа 65 600 на 2 так же, как и в предыдущем примере.

Получив в качестве частного число 512, стоящее в табл. 1 против цифры 9, мы приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам 9 нулей и единицу:

$$65\,600_{10} = 10\,000\,000\,00 \mid 1\,000\,000_2.$$

Пример 4. Записать число 7381 в двоичной системе счисления.

Производим последовательное деление данного числа на 2, пока не получаем число, содержащееся в табл. 2. Затем приписываем слева двоичное представление этого числа

115	230	461	922	1845	3690	7381
1110011	0	1	0	1	0	1

$$7381_{10} = 1\ 110\ 011\ 010\ 101_2.$$

Для перевода чисел из двоичной системы в десятичную пользуются табл. 1. При этом поступают, как в примере 5.

Пример 5. Число

$$1000\,111\,000\,110\,101\,001_2$$

записать в десятичной системе.

Перенумеровав справа налево (начиная с номера 0) все двоичные разряды данного числа, берем сумму тех степеней двойки, которым соответствуют разряды, содержащие единицу:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\,1_2 = \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\ 0 \end{array}$$

$$= 2^{18} + 2^{14} + 2^{13} + 2^{12} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^0 = 291241_{10}.$$

Можно предложить более сложный, но зато и более общий способ перехода от двоичной системы счисления к десятичной, который легко обобщается на случай перехода от любой системы к некоторой заданной.

Действительно, достаточно лишь последовательно делить данное двоичное число на число десять в двоичной записи: $10_{10} = 1010_2$. Располагая остатки справа налево и переводя их в десятичную систему счисления, получим десятичную запись данного двоичного числа.

Пример 6. Число $1\,000\,110\,110_2$ записать в десятичной системе. Осуществляя приведенную выше схему, получим:

```
1000110110|1010
 1010     |111000|1010
 ----     |1010  |----
  1111    |------|101 = 5
  1010    |10000
  ----    |1010
   1010   |------
   1010   |  110 =6
   ----
     110=6
```

Итак: $1\,000\,110\,110_2 = 566_{10}$.

Используя таблицу сложения и таблицу умножения для двоичных чисел, с ними можно производить все арифметические действия.

Таблица сложения

	0	1
0	0	1
1	1	10

Таблица умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

5. Троичная система счисления. Часто применяется в вычислительной практике и троичная система счисления — система с основанием три. В ней три цифры: 0, 1, 2. Процесс перехода от десятичной системы счисления к троичной аналогичен процессу, рассмотренному для двоичной системы счисления: осуществляются последовательные деления данного числа на 3 и остатки записываются справа налево.

Пример 1. Число 2358 записать в троичной системе счисления.

Запись удобно вести так же, как и в предыдущем пункте.

1	3	9	29	87	262	786	2358
1	0	0	2	0	1	0	0

$$2358_{10} = 10\,020\,100_3.$$

Для обратного перехода (от троичной записи к десятичной) пользуются табл. 3.

Таблица 3

Последовательные степени числа 3

n	3^n	n	3^n	n	3^n
0	1	7	2187	14	4 782 969
1	3	8	6561	15	14 348 907
2	9	9	19 683	16	43 046 721
3	27	10	59 049	17	129 140 163
4	81	11	177 147	18	387 420 489
5	243	12	531 441	19	1 162 261 467
6	729	13	1 594 323	20	3 486 784 401

Пример 2. Число $10\,020\,100_3$ записать в десятичной системе счисления.

Подписав под каждым разрядом его номер (начиная с нуля подряд справа налево) и воспользовавшись табл. 3, получим:

$$\underset{7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0}{10\,020\,100_3} = 3^7 + 2 \cdot 3^4 + 3^2 = 2358_{10}.$$

Используя таблицу сложения и таблицу умножения для троичной системы, можно легко осуществлять в ней все арифметические действия.

Таблица сложения

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Таблица умножения

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

6. Восьмеричная система счисления. Основание — число 8. В системе 8 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. В вычислительных машинах широко используется при составлении программ, так как перевод из восьмеричной

системы в двоичную производится при помощи записи каждой восьмеричной цифры тремя двоичными разрядами:

$$23\,751_8 = 010\,011\,111\,101\,001_2.$$

Перевод числа из десятичной системы счисления в восьмеричную осуществляется при помощи последовательного деления его на восемь. Все записанные справа налево подряд остатки (включая нули) образуют запись числа в восьмеричной системе.

Пример 1. Записать в восьмеричной системе число 19 432.

4	37	303	2429	19 432
4	5	7	5	0

$$19\,432_{10} = 45\,750_8.$$

Обратный переход осуществляется при помощи табл. 4, являющейся выборкой из табл. 1.

Таблица 4

Последовательные степени числа 8

n	8^n	n	8^n
0	1	5	32 768
1	8	6	262 144
2	64	7	2 097 152
3	512	8	16 777 216
4	4096	9	134 217 728
		10	1 073 841 824

Пример 2. Записать в десятичной системе число $45\,750_8$.

Пользуясь табл. 4, получим:

$$\underset{4\ 3\ 2\ 1\ 0}{4\ 5\ 7\ 5\ 0}{}_8 = 4 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 =$$

$$= 4 \cdot 4096 + 5 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 5 \cdot 8 = 19\,432_{10}.$$

Используя таблицы сложения и умножения, в восьмеричной системе можно осуществлять все арифметические действия.

Таблица сложения

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

Таблица умножения

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

7. Делимость чисел. Число a называется *делителем* числа c, если существует такое число b, что $c = ab$ (числа a, b, c — натуральные).

Необходимые и достаточные признаки делимости чисел*

Делитель	Признак
2	Оканчивается одной из цифр: 0, 2, 4, 6, 8
3	Сумма цифр делится на 3
4	Две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4
5	Последняя цифра 0 или 5
6	Одновременно соблюдаются признаки делимости на 2 и на 3
7	Разность между числом десятков и удвоенной цифрой единиц делится на 7
8	Три последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8
9	Сумма цифр делится на 9
10	Последняя цифра — нуль
11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11

* О необходимых и достаточных признаках см. на стр. 127.

Замечание 1. На 1 делятся все числа.

Замечание 2. Нуль делится на все числа. Несколько подряд стоящих нулей обозначают число нуль (см. признаки делимости на 4 или на 8).

Замечание 3. Числа, делящиеся на 2, называются *четными*, остальные числа — *нечетными*.

Замечание 4. Для делимости на 8 недостаточно одновременного выполнения признаков делимости на 2 и на 4 (сравни признак делимости на 6), так как числа 2 и 4 не являются взаимно простыми (см стр. 23).

8. Простые и составные числа. Общие делители и общие кратные. Число a называется *простым*, если его делителями являются только единица и само число a.

Числа, имеющие и другие делители, называют *составными*.

Число *единица* рассматривается особо, оно не является ни простым, ни составным.

Простых чисел бесконечно много. Все простые числа до 2803 сведены в табл. 6 на стр. 392.

Основная теорема арифметики. *Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых чисел и притом единственным образом.*

Такое представление называется *разложением на простые множители*. Оно производится с использованием признаков делимости.

Приступая к разложению числа на простые множители, следует проверить, не является ли оно простым (см. таблицу простых чисел, стр. 392).

Пример. Разложить на простые множители число 1050.

1050	2	Число четное, т. е. делится на 2.
525	3	Сумма цифр = 12, число делится на 3.
175	5	На 3 число 175 уже не делится; оно делится на 5, так как оканчивается цифрой 5.
35	5	Полученное число еще раз делится на 5.
7	7	
1		

Итак, $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Наибольший общий делитель. *Общим делителем* нескольких чисел называется число, на ко-

торое делится каждое из них. Для любых чисел общим делителем является единица, т. е. общий делитель всегда существует. Общих делителей у нескольких чисел не больше, чем делителей у любого из них, следовательно, число общих делителей всегда конечно. Поэтому для любой совокупности целых чисел всегда существует *наибольший общий делитель* (НОД).

Если наибольший общий делитель нескольких чисел равен единице, то числа называют *взаимно простыми*. Очевидно, что всегда существует и наименьший общий делитель, который для любых чисел равен единице.

Порядок разыскания НОД. Первый способ. 1) Каждое из данных чисел разлагают на простые множители. 2) Выписывают множители, входящие в состав каждого из чисел (с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях).

Замечание. Если множитель не входит хотя бы в одно из чисел, то его не включают и в НОД.

Пример 1. Найти НОД чисел: 540, 126 и 630.

$$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5;$$
$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7;$$
$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$
$$\text{НОД} = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Второй способ (способ Евклида). Применяется обычно при отыскании общего наибольшего делителя двух чисел. Большее из них делят на меньшее, затем меньшее — на первый остаток, далее первый остаток — на второй, второй — на третий и так до тех пор, пока не получится в остатке нуль; тогда последний делитель будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Пример 2. Найти НОД чисел 357 и 273

	357	273
	273	1
273	84	
252	3	
84	21	
84	4	

Последний делитель равен 21. Значит, НОД = 21.

Наименьшее общее кратное. *Общим кратным* нескольких чисел называется число, деля-

щееся на каждое из них. Для любых чисел общим кратным является их произведение. Таким образом, общее кратное существует для любой (конечной) совокупности натуральных чисел. Общих кратных бесконечно много: умножая любое общее кратное последовательно на 2, 3, 4,..., мы снова получим число, кратное данных чисел. Так как общие кратные для данных чисел образуют совокупность натуральных чисел, то всегда существует *наименьшее общее кратное* (НОК) для данной совокупности. Говорить о наибольшем общем кратном бессмысленно.

Порядок разыскания НОК. 1) Каждое из данных чисел разлагают на простые множители. 2) Выписывают все множители какого-нибудь одного из чисел, дописывают все недостающие множители из других чисел и все их перемножают (т. е. каждый множитель берется с наибольшим показателем из встречающихся в разложениях).

Пример. Найти НОК чисел 270, 300, 315.

$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5;$$
$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2;$$
$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$
$$\text{НОК} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900.$$

Б. Рациональные числа

а) Простые дроби

1. Определения. Свойства дробей. Числа, которые можно записать в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые, называются *рациональными числами* или *дробями*. Выражение $\frac{p}{q}$ называется также *отношением*. Здесь черта — символическая запись деления.

Число над чертой называется *числителем* дроби, число под чертой — ее *знаменателем*.

Свойства дробей.

1. Если $p < q$, то дробь меньше единицы,
если $p = q$, то дробь равна единице,
если $p > q$, то дробь больше единицы.

2. Если числитель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, то дробь увеличится (уменьшится) во столько же раз.

3. Если знаменатель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, то дробь уменьшится (увеличится) во столько же раз.

4. Из свойств 2 и 3 следует, что дробь не изменится, если числитель и знаменатель одновременно увеличить (уменьшить) в несколько раз.

Деление числителя и знаменателя на общий множитель называется *сокращением дроби*. Умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же число называется *расширением дроби*.

Дробь, числитель которой меньше знаменателя, называется *правильной*. Дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называется *неправильной*. Разделив числитель неправильной дроби на знаменатель, мы можем записать ее в виде *смешанного числа*. Например, $\frac{59}{11} = 5\,\frac{4}{11}$.

Дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты, называется *несократимой*.

Рациональные числа записываются в виде дробей неоднозначно. Так, дроби $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{20}$,..., выражают одно и то же рациональное число. Поэтому для записи рациональных чисел употребляют лишь несократимые дроби.

2. Сравнение дробей.

Дроби	Если	То
$\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$	$b > c$	$\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$
	$b < c$	$\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$
$\frac{d}{f}$, $\frac{e}{f}$	$d > e$	$\frac{d}{f} > \frac{e}{f}$
	$d < e$	$\frac{d}{f} < \frac{e}{f}$

Для сравнения дробей с разными числителями и знаменателями их предварительно приводят к общему знаменателю. *Наименьшим общим знаменателем* нескольких дробей называется наименьшее общее кратное их знаменателей.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, находим НОК (см. стр. 24) знаменателей дробей и берем его в качестве знаменателя каждой данной дроби. Числитель каждой дроби увеличиваем во столько раз, во сколько раз ее знаменатель меньше общего.

Например, для дробей $^2/_{11}$, $^2/_9$, $^1/_{33}$ наименьший общий знаменатель будет $11 \cdot 9 = 99$, так что

$$\frac{2}{11} = \frac{18}{99}; \quad \frac{2}{9} = \frac{22}{99}; \quad \frac{1}{33} = \frac{3}{99}$$

и поэтому $\frac{1}{33} < \frac{2}{11} < \frac{2}{9}$.

3. Действия над дробями.

Название действия	Порядок действия	Пример
Сложение	Дроби приводят к общему знаменателю и складывают полученные числители, подписывая под ними общий знаменатель	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{13}{20} = \frac{40+12+39}{60} = 1\frac{31}{60}$
Вычитание	Приводят дроби к общему знаменателю и из числителя уменьшаемого вычитают числитель вычитаемого	$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7-6}{8} = \frac{1}{8}$
Умножение	Перемножают отдельно числители дробей и отдельно их знаменатели (произведя предварительно сокращение дробей), первое произведение будет числителем результата, второе — его знаменателем	$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$
Деление	Заменяют умножением на дробь, обратную* делителю	$\frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{2}{3}$

* Поменяв в дроби местами числитель и знаменатель, получим дробь, называемую *обратной* по отношению к данной.

Замечание 1. Чтобы сложить смешанные числа, находят отдельно сумму целых чисел и сумму дробных частей, например:

$$2\frac{3}{4}+7\frac{4}{7}=(2+7)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{7}\right)=10\frac{9}{28}.$$

Замечание 2. В случае, когда дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, в уменьшаемом „занимается" единица и превращается в неправильную дробь, например:

$$3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}=3\frac{2}{6}-2\frac{3}{6}=2\frac{8}{6}-2\frac{3}{6}=\frac{5}{6}.$$

Замечание 3. Если в умножении или делении участвуют смешанные числа, то их обращают в неправильные дроби.

Типы задач

Тип задачи	Решение	Пример
1. *Отыскание целого числа по заданной величине его части*	Разделить величину части числа на дробь, выражающую его часть	Найти число, 3/4 которого равно 750. $750:\frac{3}{4}=750\cdot\frac{4}{3}=1000$
2. *Отыскание части числа по его целому*	Умножить число на дробь, выражающую его часть	Имея 6 рублей, школьник 1/6 истратил на тетради. Какова истраченная сумма? $6\cdot\frac{1}{6}=1$ (рубль)
3. *Отыскание части числа в долях целого*	Разделить величину части числа на целое	Цех выпустил 5000 деталей; из них 20 бракованных. Какую часть составляет брак? $20:5000=\frac{1}{250}$

4. Пропорции. *Пропорцией* называется равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \qquad (1)$$

Например,

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12},$$

или

$$2:3 = 8:12.$$

Члены a и d пропорции (1) называются *крайними*, b и c — *средними*.

Каждый член пропорции называется *четвертым пропорциональным* по отношению к остальным трем.

Свойства пропорций. Если задана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

или, что то же,

$$a:b = c:d,$$

то

1) $ad = bc$, т. е. произведение ее крайних членов равно произведению средних;

2) $a = \frac{bc}{d}$, $d = \frac{bc}{a}$, т. е. каждый ее крайний член равен произведению средних, деленному на другой крайний;

3) $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, т. е. каждый ее средний член равен произведению крайних, деленному на другой средний;

4) одновременно справедливы пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

т. е. в каждой пропорции можно менять местами или только средние члены, или только крайние, или и те и другие одновременно.

Производные пропорции. Если задана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

то справедливо соотношение

$$\frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd}, \qquad (2)$$

называемое *производной пропорцией.*

Частные случаи производной пропорции:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}, \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d},$$

получающиеся из пропорции (2) при некоторых значениях коэффициентов m, n, p, q.

Особые виды пропорций. *Непрерывная* пропорция:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

или

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

— пропорция с двумя равными средними или с двумя равными крайними членами. Для нее

$$b = \sqrt{ac};$$

гармоническая пропорция:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d};$$

непрерывная гармоническая пропорция:

$$\frac{a-b}{b-d}=\frac{a}{d}.$$

Из равенства нескольких отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

следует:

$$1)\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1};$$

$$2)\ \frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — любые величины.

5. Средние величины.

Даны n чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (в примерах 3, 4, 9, 12).

Среднее арифметическое

$$A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Частное от деления n величин на число этих величин.

Пример: $\frac{3+4+9+12}{4}=7.$

Среднее геометрическое

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Корень n-й степени из произведения n величин.

Пример: $\sqrt[4]{3\cdot4\cdot9\cdot12}=\sqrt[4]{1296}=6.$

Среднее гармоническое

$$H=\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}=$$

$$=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

Частное от деления числа величин на сумму их обратных значений.

Пример:

$$\frac{4}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}}=4:\frac{28}{36}=\frac{4\cdot 36}{28}=\frac{36}{7}=5\frac{1}{7}.$$

Теорема Коши

$$H\leqslant G\leqslant A;$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Среднее геометрическое нескольких величин всегда не меньше их среднего гармонического и не больше их среднего арифметического.

Пример:

$$5\frac{1}{7}<6<7.$$

Среднее квадратичное

$$K=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

Квадратный корень из частного от деления суммы квадратов заданных величин на число этих величин.

Пример:

$$\sqrt{\frac{2^2+3^2+1^2+6^2}{4}}=\sqrt{\frac{4+9+1+36}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}.$$

Среднее взвешенное

$$V=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{a_1+a_2+,..+a_n}.$$

б) Десятичные дроби. Проценты. Двоичные дроби

1. Определение. *Десятичная дробь* — частный случай обыкновенной дроби. Знаменатель десятичной дроби есть целая степень числа 10. Десятичную дробь записывают в одну строку, отделяя в ней запятой столько цифр, сколько нулей в знаменателе:

$$\frac{38543}{100} = 385{,}43; \qquad 49\frac{72}{1000} = 49{,}072.$$

Так как мы пользуемся десятичной системой счисления, то десятичные дроби приобретают особое значение.

Без существенных изменений правила действий над целыми числами переносятся на десятичные дроби.

2. Действия над десятичными дробями

Название действия	Правило	Пример
Сложение и вычитание	Аналогично сложению и вычитанию целых чисел. Необходимо следить за тем, чтобы соответствующие разряды целых и десятичные доли были записаны строго друг под другом	418,471 + 31,19 449,661 536,14 − 79,472 456,668
Умножение	Дроби перемножают как целые числа, затем в произведении справа отделяют запятой столько цифр, сколько десятичных знаков во всех сомножителях	4,09 × 0,024 1636 + 818 0,09816
Деление десятичной дроби на целое число	Делят как целые числа. Перед тем как снести в остаток первую цифру после запятой, ставят в частном запятую и далее продолжают деление, как обычно	417,96 | 86 − 344 | 4,86 739 − 688 516 − 516

Замечание 1. От переноса запятой вправо (влево) на n знаков десятичная дробь увеличивается (уменьшается) в 10^n раз.

Замечание 2. Если делимое меньше делителя, то в частном пишут нуль и ставят после него запятую. Затем к делимому приписывают справа нуль (т. е. увеличивают его в десять раз). Если после этого оно все еще остается меньше делителя, то в частном после запятой снова пишут нуль, а в делимом приписывают справа еще один нуль. Так поступают до тех пор, пока делимое не превзойдет делитель. Дальше деление производят обычным образом.

Замечание 3. Если делитель есть десятичная дробь, то следует отбросить запятую в делителе, а в делимом перенести запятую вправо на столько знаков, сколько было в делителе после запятой. Дальше поступают по правилу деления десятичной дроби на целое число.

3. Обращение десятичной дроби в простую и простой в десятичную. Чтобы обратить десятичную дробь в простую, следует число, стоящее после запятой, написать в числителе, а в знаменателе написать 10^k, где k — число цифр справа от запятой.

Пример.

$$18{,}5104 = 18\frac{5104}{10^4} = 18\frac{5104}{10000} = 18\frac{319}{625}.$$

Чтобы простую дробь обратить в десятичную, числитель простой дроби делят на ее знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

Пример 1. Дробь $\frac{36}{25}$ обратить в десятичную:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 25 \\ \hline -\ 25 & 1{,}44 \\ \hline 110 & \\ -\ 100 & \\ \hline 100 & \\ -\ 100 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Пример 2. Дробь $\frac{11}{18}$ обратить в десятичную:

$$\begin{array}{r|l} 110 & 18 \\ \hline -\ 108 & 0{,}611\ldots \\ \hline 20 & \\ -\ 18 & \\ \hline 20 & \\ -\ 18 & \\ \hline 2 & \ldots \end{array}$$

4. Периодические дроби. Бесконечная десятичная дробь, которая начиная с некоторого разряда образуется последовательным приписыванием справа одного и того же числа, называется *периодической*, а повторяющееся число — ее *периодом*.

Примеры периодических дробей:

0,333 ...; 3,5555 ...; 1,6111 ...; 2,18313131 ...

В первых двух из них повторение начинается с первой цифры после запятой — такая дробь называется *чистой периодической*. В третьей дроби сначала идет цифра 6, а затем бесконечно повторяется 1, в четвертой повторение (период 31) начинается после 18.

Периодические дроби, в которых повторение начинается не сразу после запятой, называются *смешанными периодическими*.

При записи периодических дробей период заключают в скобки:

0, (3); 3, (5); 1,6 (1); 2, 18 (31).

Обыкновенную конечную десятичную дробь можно считать периодической с периодом нуль или девять: 3,168 (0) = 3,167 (9). Принимая это во внимание, можно доказать, что любая обыкновенная дробь обращается в периодическую десятичную дробь.

Возможно и обратное преобразование: любую периодическую дробь можно обратить в простую. Здесь приходится рассматривать два случая.

1. Обращение чистой периодической дроби в простую. Период чистой периодической дроби берут числителем, а в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Примеры:

$$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\quad 1,(18) = 1\frac{18}{99} = 1\frac{2}{11}.$$

2. Обращение смешанной периодической дроби в простую. Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в простую, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.

Пример:

$$1{,}31\,(12) = 1\frac{3112-31}{9900} = 1\frac{3081}{9900} = 1\frac{1027}{3300}.$$

Второе правило легко следует из первого. Действительно, достаточно умножить смешанную периодическую дробь на 10^k, где k — число цифр после запятой до периода. Полученную чистую периодическую дробь нужно обратить по первому правилу и разделить результат на 10^k.

Примеры, поясняющие второе правило:

а) $$0{,}2\,(1) = \frac{1}{10}\cdot 2{,}\,(1) = \frac{1}{10}\cdot 2\frac{1}{9} = \frac{2}{10} + \frac{1}{90} =$$

$$= \frac{2(10-1)+1}{90} = \frac{21-2}{90} = \frac{19}{90};$$

б) $$1{,}31\,(12) = \frac{1}{100}\cdot 131{,}\,(12) = \frac{1}{100}\cdot 131\frac{12}{99} =$$

$$= 1 + \frac{31}{100} + \frac{12}{9900} = 1\frac{31\cdot 99+12}{9900} =$$

$$= 1\frac{31\,(100-1)+12}{9900} = 1\frac{3112-31}{9900} =$$

$$= 1\frac{3081}{9900} = 1\frac{1027}{3300}.$$

Мы видим, что любую простую дробь можно обратить в периодическую и обратно — каждую периодическую дробь можно обратить в простую. Таким образом, периодические десятичные дроби есть новая форма записи рациональных чисел.

5. Проценты. *Процент* — сотая часть числа. Обозначение: %. Если число принято за единицу, то 1% его составляет 0,01 этого числа, 25% составляют 0,25, или $\frac{1}{4}$, этого числа и т. д.

Выражение величины a в процентах другой величины b, т. е.

$$p = \frac{a}{b}\cdot 100\%,$$

называется *процентным отношением* чисел a и b.

Если величина a составляет p % величины b, то

$$a = \frac{bp}{100}, \quad b = \frac{100a}{p}.$$

Типы задач на проценты аналогичны типам задач на простые дроби (см. стр. 27);

1) отыскание всего числа по заданной величине его процента;

2) отыскание указанного процента от данного числа;

3) отыскание процентного отношения двух чисел.

Промилле — тысячная часть числа; обозначается $^0/_{00}$.

Сложные проценты. Рассмотрим одну из наиболее типичных задач на проценты. В сберегательную кассу внесен вклад в a рублей и положен на p процентов годовых (т. е. проценты начисляются один раз в год). Какова будет сумма денег через n лет?

Через один год на сберегательной книжке будет

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{(руб.)}.$$

Через два года:

$$\left[a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{(руб.)}.$$

Нетрудно убедиться, что через n лет сумма составит

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ (руб.)}.$$

Это и есть формула сложных процентов. (Здесь проценты насчитываются на проценты и поэтому называются *сложными*.)

6. Двоичные дроби. В двоичной системе счисления, используемой в электронных счетных машинах, роль десятичных дробей исполняют двоичные дроби. Правила действий с ними легко можно установить, используя правила действий с десятичными дробями и таблицу сложения и умножения для двоичных чисел (см. стр. 16).

Перевод двоичной дроби в десятичную: под каждым разрядом снизу подписывается его

порядок и берется сумма степеней двойки, соответствующих тем разрядам, в которых стоит единица:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1, & 0 & 1 & 1 & 0 & 1_2 = \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{array}$$

$$= 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} =$$

$$= 1235{,}40625_{10}.$$

При вычислениях полезно наряду с табл. 1 (стр. 15) пользоваться табл. 5 отрицательных степеней числа 2.

Таблица 5

Отрицательные степени числа 2

n	2^n	n	2^n
— 1	0,5	—11	0,00048828125
— 2	0,25	—12	0,000244140625
— 3	0,125	—13	0,0001220703125
— 4	0,0625	—14	0,00006103515625
— 5	0,03125	—15	0,000030517578125
— 6	0,015625	—16	0,0000152587890625
— 7	0,0078125	—17	0,00000762939453125
— 8	0,00390625	—18	0,000003814697265625
— 9	0,001953125	—19	0,0000019073486328125
—10	0,0009765625	—20	0,00000095367431640625

Перевод десятичной дроби в двоичную производится также с помощью табл. 5 по схеме следующего примера.

Число 1235,40625 записать в двоичной системе.

Сначала записываем в двоичной системе целую часть данного числа (см. стр. 14):

$$1235 = 10\,011\,010\,011.$$

Затем переводим в двоичную дробь число 0,40625. Осуществляется это при помощи последовательного

вычитания из 0,40625 отрицательных степеней двойки, начиная с 0,5. Если вычитание осуществимо, то после запятой ставим единицу, если нет — нуль. Из остатка вычитаем следующую дробь из данной таблицы и т. д. Процесс продолжается либо до тех пор, пока мы не исчерпаем данную дробь, т. е. пока в остатке не получим нули, либо до получения необходимой точности. Запись ведется по следующей схеме:

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 0{,}40625 & \\
 & -0{,}25 & 0{,}01101 \\
\hline
(n=-2) & 0{,}15625 & \\
 & -0{,}125 & \\
\hline
(n=-3) & 0{,}03125 & \\
 & -0{,}03125 & \\
(n=-5) & &
\end{array}
$$

Итак, $1235{,}406\,25_{10} = 10\,011\,010\,011{,}011\,012_2$.

II. АЛГЕБРА

А. Расширение понятия о числе

а) Действительные числа

В арифметике были введены положительные рациональные числа и изучены их свойства. В процессе развития алгебры и математического анализа понятие числа пришлось значительно расширить.

1. Числовая ось. Отрицательные числа. *Числовой осью* называется прямая, на которой заданы две точки — нуль и единица. Предположим, что нуль лежит левее единицы, а *направление* от нуля к единице отметим стрелкой (рис. 1). Расстояние между нулем и единицей называется *единицей масштаба* или *масштабным расстоянием*.

Отложив на числовой оси вправо от единицы отрезок, равный единице масштаба, получим точку, соответствующую числу 2, продолжая этот процесс, сможем каждому натуральному числу n поставить в соответствие точку числовой оси (рис. 2).

Для каждой точки n построим на оси точку, симметричную относительно нуля, и обозначим ее $-n$ (рис. 3). Числа, соответствующие построенным точкам, образуют совокупность *целых отрицательных чисел,*

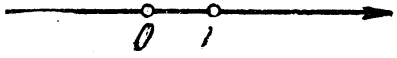


Рис. 1

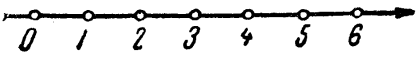


Рис. 2

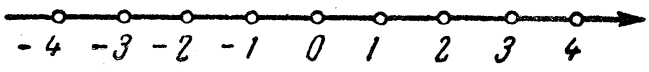


Рис. 3

для которых можно сохранить все правила действий с положительными числами. При этом нужно иметь в виду свойства, указанные на стр. 41.

Теперь с помощью деления отрезка между нулем и единицей на равные части (см. стр. 151) легко построить точки, соответствующие числам вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые, $0 < p < q$. Все остальные рациональные точки можно построить сдвигом (вправо или влево) единиц масштаба на целое число.

2. Иррациональные числа. В результате проведенного построения вся числовая ось оказывается настолько „густо" покрытой рациональными точками, что как бы мал ни был отрезок оси, в нем всегда окажется бесконечно много рациональных точек. Тем не менее на числовой оси можно указать точки, не являющиеся рациональными. Например, точка, отстоящая от нуля на расстояние, равное диагонали квадрата со стороной единица (рис. 4), не может быть рациональной.

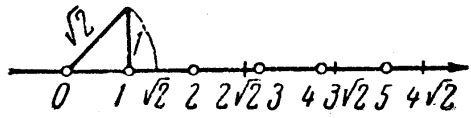


Рис. 4

Действительно, если предположить, что $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа, то $p^2 = 2q^2$. Из

записи следует, что p четно, а значит p^2 делится на четыре. Тогда и q четно, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

Итак, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Расстояние между числами 0 и $\sqrt{2}$ можно, как и единицу масштаба, разделить на любое число равных частей (см. стр. 151) и получить точку для каждого числа $p/q \cdot \sqrt{2}$. Итак, одно нерациональное число $\sqrt{2}$ порождает столько же новых нерациональных чисел, сколько имеется в нашем распоряжении рациональных.

Число, выраженное в форме бесконечной десятичной непериодической дроби, называется *иррациональным*.

Рациональные и иррациональные числа в совокупности называются *действительными*, или *вещественными*.

Можно доказать, что каждому действительному числу соответствует только одна точка числовой оси, а каждой точке числовой оси соответствует только одно действительное число.

Таким образом, каждое действительное число можно изобразить в виде точки числовой оси. В этом и заключается геометрическое представление действительных чисел.

3. Алгебраические и трансцендентные числа. Действительные числа подразделяются также на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраическими называются числа, которые являются корнями алгебраических многочленов с целыми коэффициентами.

Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 4, $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt{6}}$ — алгебраические числа.

Неалгебраические числа называются *трансцендентными*.

Так как каждое рациональное число p/q является корнем соответствующего многочлена первой степени с целыми коэффициентами $qx - p$, то все трансцендентные числа иррациональны.

Доказать, что некоторое число трансцендентно, далеко не просто.

Первый пример трансцендентных чисел был построен лишь в середине прошлого столетия французским математиком Лиувиллем.

Трансцендентными являются числа e, π, синусы многих рациональных величин, логарифмы целых чисел и т. д.

4. Действия над действительными числами. Над действительными числами выполняются четыре арифметических действия, свойства которых сведены в таблицу.

Формула		Название свойства
для сложения	для умножения	
$a + b = b + a$	$ab = ba$	Переместительность (коммутативность)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$	Сочетательность (ассоциативность)
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$	Свойства нуля и единицы
	$a \cdot 1 = a$	
$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = \frac{a}{a} = 1$ $(a \neq 0)$	Существование противоположного числа (возможность вычитания) и обратного числа (возможность деления)
$(a + b)c = ac + bc$		Распределительность (дистрибутивность)
$-(-a) = a$; $a+(-b)=a-b$; $a-(-b)=a+b$	$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$; $(-a) \cdot (-b) = ab$; $a \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = a : (-b) = (-a) : b = (-a) \cdot \frac{1}{b} = -\frac{a}{b}$	Свойства действий с отрицательными числами

6) Комплексные числа

1. Определения. Действия над комплексными числами. Дальнейшим и в некотором смысле заключительным этапом расширения понятия о числе является введение комплексных чисел. Необходимость такого расширения понятия о числе возникает хотя бы потому, что действие извлечения корня из действительного числа не всегда возможно в области действительных чисел. В самом деле, например, невозможно указать такое действительное число, которое было бы равно корню квадратному из отрицательного числа.

Комплексными называются числа вида $a + bi$ (где a и b — действительные числа*), если они обладают следующими тремя свойствами:

1. Равенство

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$$

двух комплексных чисел возможно тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

2. Сложение двух комплексных чисел осуществляется по правилу:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

3. Умножение комплексных чисел осуществляется по правилу:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

(т. е. по обычному правилу умножения многочленов с обязательной заменой i^2 числом -1).

Укажем два важных следствия из первого и третьего свойства.

Следствие 1. $a_1 + b_1 i = 0$ тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1 = 0$.

---

* a — *действительная часть* комплексного числа; bi — его *мнимая часть*; b — *коэффициент мнимой части*.

Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных (при $b = 0$).

Комплексные числа $a + bi$ при $b \neq 0$ называются ***мнимыми***; числа вида bi называются ***чисто мнимыми***.

Следствие 2. Из правила умножения комплексных чисел вытекает, что

$$i^2 = -1 \text{ или } i = \sqrt{-1}.$$

Таким образом,

$$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

Комплексные числа обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для сложения и умножения (см. стр. 41).

Мнимые числа нельзя сравнивать по величине (для них не имеют смысла понятия „больше“ и „меньше“).

Для каждого комплексного числа $a + bi$ существует *противоположное* ему число $-(a + bi) = -a - bi$. Отсюда получаем

правило вычитания комплексных чисел:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Числа вида

$$a + bi \quad \text{и} \quad a - bi,$$

отличающиеся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

Свойства комплексно-сопряженных чисел. Сумма и произведение двух комплексно-сопряженных чисел есть всегда число действительное:

$(a + bi) + (a - bi) = 2a$; $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Деление комплексных чисел

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

при $a_2 + b_2 i \neq 0$ всегда возможно и осуществляется с помощью умножения делимого и делителя на число, комплексно-сопряженное делителю:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Примеры:

1) $(3-2i)+(1+i)=(3+1)+(-2+1)i=4-i$;

2) $(3-i)-(3+2i)=(3-3)+(-i-2i)=-3i$;

3) $(6+2i)(3-4i)=(18+8)+(6-24)i=26-18i$;

4) $\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(3-1)+(-1-3)i}{1+1}=1-2i$;

5) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i\cdot i}=\dfrac{i}{-1}=-i$;

6) Дано комплексное число $a+bi\neq 0$. Найти *обратное* ему число $\dfrac{1}{a+bi}$. Имеем:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=$$

$$=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

2. Геометрическое истолкование. Расположив на плоскости две пересекающиеся под прямым углом числовые оси с общим масштабом, мы получим наиболее удобное геометрическое истолкование комплексных чисел: каждому комплексному числу $a+bi$ соответствует одна точка (a, b) комплексной плоскости с координатами a и b или же вектор $\{a, b\}$ и, обратно, каждой точке (a, b) плоскости соответствует одно комплексное число $a+bi$ (рис. 5). Горизонтальная ось называется *действительной*, вертикальная — *мнимой*. Комплексно-сопряженные числа симметричны относительно действительной оси, противоположные — симметричны относительно нуля (рис. 5).

Сложение и вычитание комплексных чисел можно истолковать как сложение и вычитание соответствующих векторов (см. стр. 228). На рис. 6 и 7 показано геометрическое построение соответственно суммы и разности комплексных чисел.

3. Тригонометрическая форма. Комплексное число $a+bi\neq 0$ может быть единственным образом записано в виде

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\qquad 2\pi k\leqslant\varphi\leqslant 2\pi(k+1),$$

называемом *тригонометрической формой* комплексного числа.

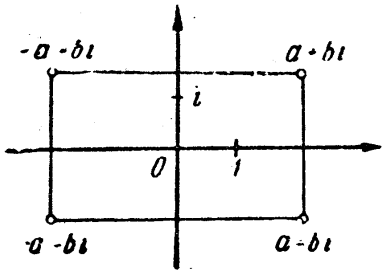


Рис. 5

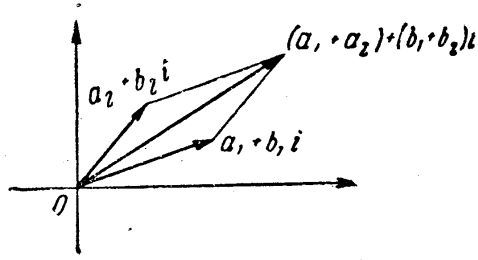


Рис. 6

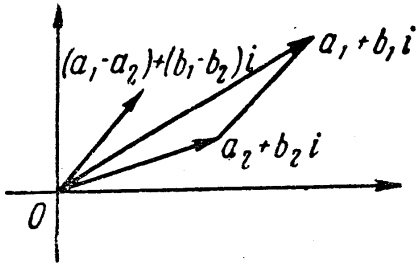


Рис. 7

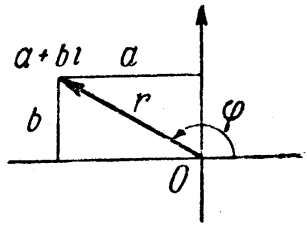


Рис. 8

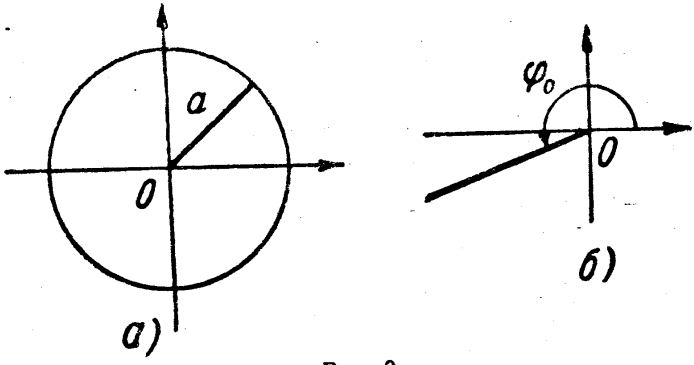


Рис. 9

Здесь r — расстояние от начала координат до заданной точки (a, b), а φ — угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против часовой стрелки действительную ось, чтобы она проходила через точку (a, b) (см. рис. 8). Положительное число r называется *модулем*, или *абсолютной величиной* комплексного числа $a + bi$, число φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ называется его *аргументом*.

Обозначения:

$$r = |a + bi| = \operatorname{mod}(a + bi), \quad \varphi = \arg(a + bi).$$

Модулем действительного числа a (обозначается $|a|$) называется положительное число, определяемое формулой

$$|a| = \begin{cases} -a \text{ при } a < 0, \\ a \text{ при } a \geqslant 0. \end{cases}$$

Переход от алгебраической формы $a + bi$ комплексного числа к его тригонометрической форме и обратно осуществляется по формулам:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a}, \text{ если } a > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a = 0,\ b > 0, \\ \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a} + \pi, \text{ если } a < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } a = 0,\ b < 0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= r \cos \varphi, \\ b &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

Комплексные числа z с одним и тем же модулем a (т. е. для которых $|z| = a$) образуют на комплексной плоскости окружность радиуса a с центром в начале координат (рис. 9, *а*). Комплексные числа z с одним и тем же аргументом φ_0 образуют луч, выходящий из начала координат под углом φ_0 к действительной полуоси (рис. 9, *б*).

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня значительно проще производить над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Умножение:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

(модули перемножают, а аргументы складывают).

Деление:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

(первый модуль делят на второй; из первого аргумента вычитают второй).

Возведение в степень (целую положительную) производят по *формуле Муавра*:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(модуль возводят в ту же степень, а аргумент умножают на показатель степени).

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right);$$

при этом коэффициенту k придают последовательно n значений: $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и получают n значений корня, т. е. ровно столько, каков показатель корня.

Пример 1.

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16(\cos 0 + i\sin 0)} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Получаем четыре значения корня:

$$2(\cos 0 + i\sin 0) = 2(1 + i0) = 2;$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i) = 2i;$$

$$2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2;$$

$$2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Они располагаются на действительной и мнимой осях на расстоянии в 2 единицы масштаба от начала координат (рис. 10, *а*).

Пример 2.

$$\sqrt[6]{-1} = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right),$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5.$$

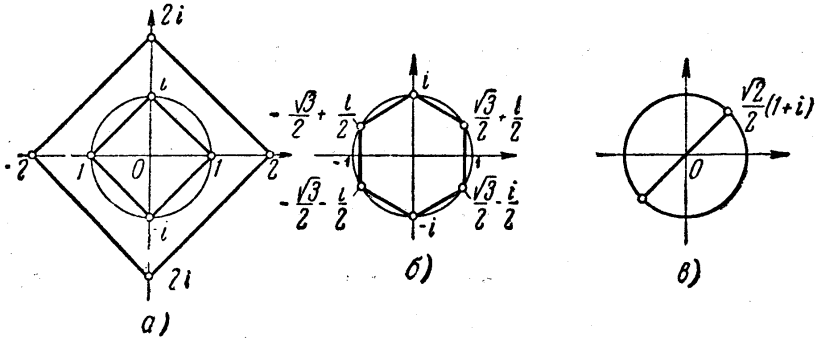


Рис. 10

Получаем шесть значений корня (рис. 10, *б*):

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),\quad i,\quad \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i),$$
$$\frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i),\quad -i,\quad \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Пример 3.

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right),$$
$$k = 0,\ 1.$$

Получаем два значения (рис. 10, *в*):

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);\quad \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i).$$

Б. Алгебраические выражения

а) Степени и корни

1. Определения. *Степень* действительного числа a с натуральным показателем n есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a, \ldots,\ a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}.$$

Действительным корнем n-й степени из действительного числа b называется такое действительное число x, что $x^n = b$.

Запись: $x = \sqrt[n]{b}$.

Положительный корень n-й степени из положительного числа называется *арифметическим корнем*. Можно доказать, что арифметический корень любой степени n из любого положительного числа существует.

Замечание. В элементарной математике выражение $\sqrt[n]{a}$ понимают как арифметический корень, если a положительно, и как действительный корень, если a отрицательно, а n нечетно. Поэтому

$$\sqrt{4} = 2, \text{ но } \sqrt{4} \neq -2, \text{ хотя } (-2)^2 = 4;$$

с другой стороны, $\sqrt[3]{-8} = -2$ (это действительный корень).

Вообще

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} -a, & \text{если } a < 0; \\ a, & \text{если } a \geqslant 0. \end{cases}$$

Например, $\sqrt{(-4)^2} = 2$, а не -2.

Следующие факты принимаются в качестве определений:

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Выражение 0^0 смысла не имеет.

Если $a > 0$, а числа m и n — натуральные, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Замечание. Здесь имеются в виду арифметические корни. При n нечетном можно рассматривать и действительные корни для $a < 0$.

Примеры.

1) $a^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}}$ $(a > 0)$;

2) $(-5)^{\frac{7}{2}}, (-8)^{-\frac{1}{2}}$ — не имеют смысла в области действительных чисел;

3) $(-8)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-8}} = -\frac{1}{2}$ (действительный корень).

Если $a > 0$, то a^{ρ}, где ρ — иррациональное число, можно определить как предел a^{p_k} (p_k — рациональные) при $p_k \to \rho$.

2. **Действия над степенями.** Для степеней, удовлетворяющих ограничениям, указанным в определениях, справедливы следующие соотношения:

$a^{\rho_1} a^{\rho_2} = a^{\rho_1+\rho_2}$
$a^{\rho_1} : a^{\rho_2} = a^{\rho_1-\rho_2}$
— при умножении (делении) степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются (вычитаются), а основание сохраняется;

$(a^{\rho_1})^{\rho_2} = a^{\rho_1\rho_2}$ — при возведении степени в степень показатели степени перемножаются, а основание сохраняется;

$(ab \dots l)^{\rho} = a^{\rho} b^{\rho} \dots l^{\rho}$ — степень произведения сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей;

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\rho} = \frac{a^{\rho}}{b^{\rho}}$ — степень частного равна частному степеней делимого и делителя.

Из приведенных формул следуют подобные соотношения для корней:

$\sqrt[\rho]{ab \dots l} = \sqrt[\rho]{a}\,\sqrt[\rho]{b} \dots \sqrt[\rho]{l}$ — корень из произведения сомножителей равен произведению корней из этих же сомножителей;

$$\sqrt[\rho]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[\rho]{a}}{\sqrt[\rho]{b}}$$

— корень из частного равен частному корней из делимого и делителя;

$$\sqrt[\rho]{a} = \sqrt[\rho k]{a^k}$$

— подкоренное число можно возвести в любую степень k, умножив на это же число k показатель корня (величина корня от этого не изменится).

Замечание. Если отказаться от ограничений, накладываемых определениями, можно легко получить абсурдные соотношения. Например:

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)\ (-2)} = \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = (\sqrt{-2})^2 = -2;$$

$$\frac{2}{3} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\frac{(-2)^4}{3^4}} = -\frac{2}{3};$$

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

3. Вынесение множителя из-под радикала. Если a и b — положительные числа, то

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

Эта формула применяется как слева направо, так и справа налево. При использовании ее нужно твердо помнить, что всегда она верна лишь при положительных a и b; а при нечетных n — для любых действительных a и b. Поэтому нельзя писать, например

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b},$$

а следует писать

$$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b},$$

т. е.

$$\sqrt{a^2 b} = \begin{cases} -a\sqrt{b}, & a < 0, \\ a\sqrt{b}, & a > 0. \end{cases}$$

4. Исключение иррациональности в дроби.

Случай 1. В знаменателе стоит радикал $\frac{A}{\sqrt[n]{a}}$. Умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt[n]{a^{n-1}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a}}$, получим $\frac{A\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.

Случай 2. В знаменателе стоит алгебраическая сумма, причем, по крайней мере, одно из слагаемых — радикал:

$$\text{а)}\ \frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\quad \text{б)}\ \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},$$

$$\text{в)}\ \frac{A}{a+\sqrt{b}},\quad \text{г)}\ \frac{A}{a-\sqrt{b}}.$$

В этих случаях умножаем числитель и знаменатель на соответствующие сопряженные выражения:

а) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, б) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, в) $a-\sqrt{b}$, г) $a+\sqrt{b}$.

Если число слагаемых больше двух, то исключение иррациональности производится последовательно:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{A}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}} =$$

$$= \frac{A[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\ (a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}$$

Пример 1. Преобразовать выражение $\frac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

Умножая числитель и знаменатель на $2-\sqrt{4-x^2}$, получим

$$\frac{x^3(2-\sqrt{4-x^2})}{(2+\sqrt{4-x^2})(2-\sqrt{4-x^2})} = \frac{x^3(2-\sqrt{4-x^2})}{x^2} =$$

$$= x(2-\sqrt{4-x^2}).$$

Пример 2. Преобразовать выражение: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

Умножая на $\sqrt{2}-1$ числитель и знаменатель дроби, получим

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1}=3-2\sqrt{2}.$$

При вычислении пределов приходится домножать на сопряженное выражение и числитель дроби, а иногда числитель и знаменатель одновременно.

Пример 3. Для вычисления предела

$$\lim_{x\to -4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$$

нужно числитель и знаменатель умножить на

$$(3+\sqrt{x^2-7})\ (2+\sqrt{8+x}):$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}=$$

$$=\lim_{x\to -4}\left(\frac{3^2-(x^2-7)}{2^2-(8+x)}\cdot\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -4}\left(-\frac{16-x^2}{4+x}\cdot\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -4}(x-4)\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}=-\frac{32}{6}.$$

5. Формула сложного радикала.

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+m}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-m}{2}},$$

где $m=\sqrt{A^2-B}$.

Пример. Преобразовать выражение:

$$\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}.$$

По формуле сложного радикала

$$\sqrt{9-\sqrt{17}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-17}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-17}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{9+8}-\sqrt{9-8}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{17}-1\right);$$

$$\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right).$$

б) Многочлены

1. Определения. Действия над многочленами. *Одночленом* называется произведение, составленное из числового множителя (*коэффициента*) и одной или нескольких букв, каждая из которых взята в некоторой степени.

Примечание. Числа, выраженные цифрами, также причисляются к одночленам. Коэффициенты в одночленах могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными.

Примеры одночленов:

$$7ab^2c^5;\ \frac{7}{5}x^3z;\ -5cz^2n;\ -b;\ 6{,}8.$$

Многочленом (или *целым* алгебраическим выражением) называется алгебраическая сумма нескольких одночленов, каждый из которых называется *членом многочлена.*

Одночлен можно рассматривать как частный случай многочлена, состоящего из одного члена. Многочлен, составленный из двух или из трех членов, называется, соответственно, *двучленом* или *трехчленом.*

Члены многочлена, либо равные, либо отличающиеся только коэффициентами, называются *подобными.*

Приведением подобных членов называется замена нескольких подобных членов одним, коэффициент которого равен алгебраической сумме их коэффициентов.

Пример.

$$\underline{x^2}-\underline{\underline{4xy}}+\underline{\underline{3a^2}}+\underline{\underline{8xy}}-\underline{\underline{5a^2}}-\underline{x^2}-2yz=$$

$$=4xy-2a^2-2yz.$$

Мы будем рассматривать лишь многочлены вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где n — натуральное число, называемое *степенью многочлена.*

Сложение многочленов — образование нового многочлена, включающего все одночлены складываемых многочленов

Чтобы *вычесть* многочлен из многочлена, надо к членам уменьшаемого прибавить члены вычитаемого, взятые с противоположными знаками.

При *умножении* (*делении*) многочлена на одночлен следует каждый член многочлена умножить (разделить) на этот одночлен и результаты сложить:

$$(x^2 + 2x + 3)\, ax = ax^3 + 2ax^2 + 3ax.$$

Произведение многочленов определяется как сумма произведений одного многочлена на каждый одночлен другого:

$$(x^2 + x + a)(bx + c) = (x^2 + x + a)\, bx +$$

$$+ (x^2 + x + a)\, c = bx^3 + bx^2 + abx + cx^2 + cx + ac =$$

$$= bx^3 + (b + c)\, x^2 + (ab + c)\, x + ac.$$

2. Формулы сокращенного умножения и деления.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы);

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности);

$a^2 - b^2 = (a + b)\, (a - b)$ (разность квадратов);

$a^3 + b^3 = (a + b)\, (a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов);

$a^3 - b^3 = (a - b)\, (a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов);

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2}\, ab) \times (a^2 + b^2 + \sqrt{2}\, ab)$ (сумма четвертых степеней);

$a^4 - b^4 = (a - b)\, (a + b)\, (a^2 + b^2)$ (разность четвертых степеней);

$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$ (произведение двучленов);

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$ (преобразование произведения);

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+$ (квадрат суммы);

$+2ab+2ac+2bc$

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-$ (квадрат разности).

$-2ab-2ac+2bc$

3. Деление многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера.

Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ — значит найти многочлены $M(x)$ (*частное*) и $N(x)$ (*остаток*) такие, что

$$P(x)=M(x)Q(x)+N(x),$$

причем степень многочлена $N(x)$ ниже степени $Q(x)$.

Пример.

$$\begin{array}{r|l}
8x^4-3x^2+6x+4 & 2x^2+3x+1 \\
\hline
-\,8x^4+12x^3+4x^2 & \hline
4x^2-6x+\frac{11}{2} \\
\hline
-12x^3-7x^2+6x & \\
-\,-12x^3-18x^2-6x & \\
\hline
11x^2+12x+4 & \\
-\,11x^2+\frac{33}{2}x+\frac{11}{2} & \\
\hline
-\frac{9}{2}x-\frac{3}{2} &
\end{array}$$

Здесь

$P(x)=8x^4-3x^2+6x+4$, $Q(x)=2x^2+3x+1$;

$$M(x)=4x^2-6x+\frac{11}{2},\quad N(x)=-\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}=$$

$$=-\frac{3}{2}(3x+1).$$

Часто приходится делить многочлен на двучлен $x-\alpha$. В этом случае удобно пользоваться схемой сокращенного деления (*схемой Горнера*).

Пусть требуется разделить многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ на $x - \alpha$. Составляем таблицу коэффициентов при x, располагая их в порядке убывания степеней (если некоторые степени отсутствуют, то за соответствующий коэффициент принимаем нуль);

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
α	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1}+\alpha b_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2}+\alpha b_{n-2}$	...	$N = a_0+\alpha b_0$

Перед таблицей записываем значение α из заданного двучлена. Нижнюю строку таблицы заполняем по следующему правилу: значение первого коэффициента переписываем; в каждой следующей клетке записываем число, равное сумме коэффициента, стоящего над ним, и произведения коэффициента, расположенного перед таблицей, на число, находящееся в соседней слева клетке. В n первых клетках мы получаем коэффициенты частного, расположенные в порядке убывания степеней буквы x; в $(n+1)$-й клетке получаем остаток от деления.

Пример. Найти $(2x^4 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2)$.

Здесь $\alpha = -2$. Составляем таблицу:

	2	0	3	1	−5
−2	2	−4	11	−21	37

Таким образом, мы получили частное $2x^3 - 4x^2 + 11x - 21$ и остаток 37:

$$2x^4 + 3x^2 + x - 5 =$$
$$= (2x^3 - 4x^2 + 11x - 21)(x + 2) + 37.$$

Остаток от деления многочлена на двучлен можно найти не производя деления, пользуясь теоремой Безу.

Теорема Безу. *Многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ при делении на $x - \alpha$ дает остаток, равный значению многочлена при $x = \alpha$.*

Пример. Не производя деления, найти остаток

$$(2x^4 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2).$$

Подставляя в делимое $x = -2$, найдем $2(-2)^4 + 3(-2)^2 + (-2) - 5 = 37$. Кстати, мы убедились в том, что в вычислениях предыдущего примера не допущена ошибка.

4. Разложение многочлена на множители. Если многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ удается представить в виде произведения других многочленов, то говорят, что данный многочлен разложен на множители.

Если многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ может быть представлен в виде

$$a_n(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda),$$

то $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ называются *корнями* данного многочлена.

Если комплексное число $a + bi$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то корнем этого многочлена обязательно будет и число $a - bi$, комплексно сопряженное с первым.

Отсюда сразу следует, что каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)(x^2+p_1x+q_1)\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_lx+q_l).$$

Примеры.

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$;

2) $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6 = 6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+3) =$
$$= (2x+1)(3x-2)(x+3);$$

3) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+1)^2(x^2+2)$.

Приемы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение за скобки. Если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобки.

Пример.

$$7a(x+2) + 4ab(x+2) = a(x+2)(7+4b).$$

2. Способ группировки. Члены многочлена соединяют в группы, имеющие одинаковые множители.

Пример.

$$12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) =$$

$$= 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) =$$

$$= (3 - x)(2 - x)(2 + x).$$

3. Иногда полезно ввести вспомогательные члены или разложить какой-либо член на подобные слагаемые.

Пример.

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$$

$$= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

в) Алгебраические дроби

1. Определение. Свойства. Выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где в числителе и в знаменателе стоят многочлены, называется *алгебраической дробью.*

Алгебраическая дробь удовлетворяет всем свойствам обыкновенной дроби (см. стр. 24), ее можно сокращать и расширять, две алгебраические дроби можно сравнивать и т. д.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общие корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, то алгебраическую дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно сократить на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots$ Если $P(x)$ разделится на $Q(x)$ без остатка, мы получим целое алгебраическое выражение.

Дальше мы будем рассматривать только дроби, в которых уже произведено сокращение. Теперь о дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно сказать, что она принимает конечные значения при всех x, кроме корней уравнения $Q(x) = 0$. Корни же знаменателя обращают эту дробь в бесконечность.

Замечание. Вообще говоря, сокращение дроби на $x - \alpha$ возможно лишь при $x \neq \alpha$, так как деление

на нуль воспрещено. Мы не оговариваем это специально и рассматриваем в качестве значения дроби лишь $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, который равен конечному числу, если $P(x)$ имеет корень a кратности не меньшей, чем $Q(x)$, и бесконечности в противном случае.

2. Действия с алгебраическими дробями.

Сложение и вычитание.

1. Если знаменатели складываемых или вычитаемых дробей не имеют общих множителей, то поступают так:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) \pm P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)},$$

т. е. за общий знаменатель принимают произведение данных знаменателей.

2) Если знаменатели имеют общий множитель $r(x)$, т. е. могут быть представлены в виде $Q_1(x) = r(x)q_1(x)$, $Q_2(x) = r(x)q_2(x)$, то

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{1}{r(x)}\left(\frac{P_1(x)}{q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{q_2(x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{r(x)}\left(\frac{P_1(x)q_2(x) \pm P_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}\right).$$

3) Когда разложение знаменателей на множители слишком трудоемко, то поступают так же, как в первом случае.

Замечание 1. Во всех случаях после выполнения действий нужно попытаться сократить дробь, полученную в результате.

Замечание 2. Вместо разложения знаменателей на множители можно попытаться найти их наибольший общий делитель по схеме Евклида (см. стр. 23). При этом в качестве первого делимого берется знаменатель с большей степенью (при равных степенях выбирается любой). Если на некотором этапе деления в остатке появится постоянная, то $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ не имеют общих целых делителей, отличных от константы.

Умножение и деление.

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)};$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)P_2(x)}.$$

Перед тем как почленно перемножить многочлены в числителе и знаменателе, нужно, если это возможно, сократить полученные дроби.

3. Разложение на простейшие дроби. Часто бывает удобно представить алгебраическую дробь в виде суммы дробей с простейшими действительными знаменателями. Так как знаменатель может быть разложен в произведение множителей первой и второй степени, уже не разложимых дальше, то рассмотрим на конкретных примерах четыре возможных случая.

Разложение осуществляется с помощью *метода неопределенных коэффициентов.*

Случай 1. В разложение знаменателя алгебраической дроби входят только множители первой степени и ни один из них не повторяется.

Пример. Алгебраическую дробь

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

разложить на простейшие.

Так как

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2),$$

то попытаемся разложить данную дробь на простейшие вида

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} =$$

$$= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 2}, \qquad (1)$$

где постоянные A, B, C и D найдем с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Приводим равенство (1) к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2). \quad (2)$$

Равенство (2) справедливо при любых значениях x, т. е. должно выполняться тождественно. Поэтому мы выбираем столько значений x, сколько у нас имеется неизвестных коэффициентов, и из (2) получаем уравнения (в данном случае их четыре) для определения A, B, C, D.

$x = -1$	$4 = A(-2)(+1)(-3) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0$, откуда $A = \frac{2}{3}$;
$x = 1$	$2 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) + C \cdot 0 + D \cdot 0$, откуда $B = -\frac{1}{3}$;
$x = -2$	$8 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-1)(-3)(-4) + D \cdot 0$, откуда $C = -\frac{2}{3}$;
$x = 2$	$4 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4$, откуда $D = \frac{1}{3}$.

Значения $x = -1, 1, -2, 2$ выбраны потому, что они обращают в нуль максимальное число членов в правой части (2) и дают поэтому наиболее простые уравнения.

Мы получили следующее разложение:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Случай 2. В разложение знаменателя входят только множители первой степени и некоторые из них повторяются. В этом случае в правой части берутся все последовательные степени знаменателя.

Пример. Алгебраическую дробь

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$$

разложить на простейшие.

Так как знаменатель дроби содержит двукратный множитель $x+2$, то этому множителю будет соответствовать столько членов в правой части, какова его кратность (в данном случае два члена):

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \qquad (3)$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$x^2 = A(x+2)^2 + B_1(x+1)(x+2) + B_2(x+1).$$

Давая x значения -1, -2, 0, получим уравнения

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 1 = A; \\ x=-2 & 4 = -B, \text{ откуда } B_2 = -4 \\ x=0 & 0 = 4A + 2B_1 + B_2, \text{ откуда } B_1 = 0. \end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Случай 3. В разложение знаменателя алгебраической дроби входят множители второй степени (не разложимые на вещественные множители первой степени) и ни один из них не повторяется. В правой части берется сумма дробей с неразложимыми далее знаменателями. При этом знаменателям первой степени соответствуют постоянные числители (A, B, C), а знаменателям второй степени — линейные числители $Lx + M$.

Пример. Алгебраическую дробь

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2(x^2+2)}$$

разложить на простейшие.

Ищем разложение в виде

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$x^3 + 4x^2 + 6 = A_1 (x + 1)(x^2 + 2) + A_2 (x^2 + 2) + \\ + (Bx + C)(x + 1)^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = A_1 + B, \\ x^2 & 4 = A_1 + A_2 + 2B + C, \\ x^1 & 0 = 2A_1 + B_1 + 2C, \\ x^0 & 6 = 2A_1 + 2A_2 + C. \end{array}$$

Решая эту систему четырех уравнений, находим

$$A_1 = \frac{1}{3},\ A_2 = 3,\ B = \frac{2}{3},\ C = -\frac{2}{3},$$

т. е.

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x + 1)^2 (x^2 + 2)} = \\ = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

Заметим, что приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях здесь удобнее, чем выбор определенных значений x, так как лишь $x = -1$ позволяет получить удобное уравнение; при остальных значениях x ни один член в правой части не обратится в нуль.

Случай 4. Те же условия, что и в случае 3, только множители второй степени могут повторяться. Речь идет о том, что в разложение знаменателя входят множители вида $(ax^2 + bx + c)^n$. В этом случае каждому множителю будут соответствовать n слагаемых в правой части:

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \\ + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Пример. Алгебраическую дробь

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$$

разложить на простейшие.

Правая часть разложения должна иметь вид:

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2}+\frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$3x+1=A(1+x^2)^2+(B_1x+C_1)x(1+x^2)+$$
$$+(B_2x+C_2)x.$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений

x^4	$A+B_1=0,$
x^3	$C_1=0,$
x^2	$2A+B_1+B_2=0,$
x^1	$C_1+C_2=3$
x^0	$A=1,$

решая которую найдем

$$A=1,\ B_1=-1,\ C_1=0,\ B_2=-1,\ C_2=3.$$

Итак, мы получим разложение

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{(1+x^2)^2}.$$

В. Уравнения

а) Общие сведения

1. Равенства. Тождества. Уравнения. Два алгебраических выражения, соединенных знаком равенства, называются *равенством*.

Замечание. Может случиться, что при некоторых значениях букв одно из выражений, соединенных

знаком равенства, или оба эти выражения бессмысленны. Тогда самое равенство также бессмысленно.

Например, равенство $\frac{a}{b+1} = 3b$ бессмысленно при $b = -1$.

Равенство, верное при всех допустимых значениях* входящих в него букв, называется *тождеством*. Тождествами называются также и все верные числовые равенства.

Уравнением называется равенство, выражающее зависимость между величинами. Оно обычно обращается в тождество лишь при *некоторых* частных значениях входящих в него букв.

Те буквы, при частных значениях которых уравнение преобразуется в тождество, называются *неизвестными* данного уравнения. Значения неизвестных, обращающие данное уравнение в тождество, называются *решениями* или *корнями* уравнения.

Решить уравнение — значит найти все его корни.

2. Классификация уравнений.

1. Уравнение называется *алгебраическим*, если над неизвестными не совершается иных действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

В противном случае уравнение называется *трансцендентным*.

К трансцендентным уравнениям относятся логарифмические, показательные, тригонометрические и т. д.

Алгебраические уравнения подразделяются на три типа:

а) *целое алгебраическое уравнение* [обе его части — целые алгебраические выражения (см. стр. 54) относительно неизвестных].

Пример. Уравнения

$$(x-5)(x-3) = (x+1)(x+4),$$

$$x^4 + \frac{2}{5}x^2 - 1 = 0$$

— целые алгебраические;

---

* То есть таких значениях, при которых сравниваемые выражения имеют смысл.

б) *дробное алгебраическое уравнение* (содержит в знаменателе выражение, зависящее от неизвестных), например:

$$\frac{x-1}{x}=\frac{x^2-1}{x+3}-x;$$

в) *иррациональное уравнение* (содержит под знаком корня выражение, зависящее от неизвестных), например:

$$\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{x-2}=2.$$

Решение дробных и иррациональных уравнений может быть сведено к решению целых уравнений (см. стр. 79).

2. По числу неизвестных уравнения подразделяются на уравнения с одним неизвестным, с двумя, с тремя и т. д.

3. Целое алгебраическое уравнение с одним неизвестным всегда можно преобразовать в равносильное уравнение (см. ниже) вида:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

Степенью исходного уравнения при этом называется степень полученного в левой части многочлена.

Уравнения первой степени называются иначе *линейными*, уравнения второй степени — *квадратными*, уравнения третьей степени — *кубичными*.

Несколько уравнений образуют *систему уравнений*, если в них одноименные неизвестные обозначают одну и ту же величину.

Решением системы уравнений называется упорядоченная совокупность значений неизвестных, обращающая в нуль каждое уравнение системы.

Уравнения образуют *совокупность*, если их решения объединяются, т. е. решением совокупности будет каждое решение, каждого (а не всех!) уравнения.

3. Равносильные уравнения. Два уравнения называются *равносильными* (*равнозначными*, *эквивалентными*), если каждое решение первого уравнения является решением второго, и обратно: каждое решение второго уравнения является решением первого.

Процесс решения заключается в том, что при помощи алгебраических преобразований заменяют данное

уравнение ему равносильным до тех пор, пока не придут к уравнению, левая часть которого есть само неизвестное, а правая часть не содержит неизвестных вообще.

Преобразования, приводящие к равносильным уравнениям.

1. Прибавление к обеим частям уравнения или вычитание из обеих частей его одного и того же выражения.

2. Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, отличное от нуля.

Следствие 1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив знак перед ним на противоположный.

Следствие 2. У всех членов уравнения можно поменять знак на противоположный.

3. Если уравнение приводится к виду $F(x) \cdot G(x) = 0$, то оно эквивалентно совокупности уравнений

$$F(x) = 0,$$

$$G(x) = 0.$$

Уравнение $F(x) \cdot G(x) = 0$ называется *распадающимся*.

Примеры.

1. $x^2 + x - 2 = 0$;

$(x - 1)(x + 2) = 0$;

$x - 1 = 0$, $x_1 = 1$;

$x + 2 = 0$, $x_2 = -2$.

2. $(x - 3) \ln x = 0$;

$x - 3 = 0$, $x_1 = 3$;

$\ln x = 0$, $x_2 = 1$.

4. При извлечении квадратного корня из обеих частей уравнения

$$F^2(x) = G^2(x)$$

оно распадается на совокупность двух уравнений:

$$F(x) = G(x);$$

$$F(x) = -G(x).$$

Примеры.

1. $x^2 = (x^2 - 2)^2$;

а) $x = x^2 - 2$,

$x^2 - x - 2 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$;

б) $-x = x^2 - 2$,

$x^2 + x - 2 = 0$,

$x_3 = 1$,

$x_4 = -2$.

2. $[\ln(x-3)]^2 = 1$;

а) $\ln(x-3) = 1$,

$x - 3 = 10$,

$x = 13$;

б) $\ln(x-3) = -1$,

$x - 3 = 0{,}1$,

$x = 3{,}1$.

Если все корни первого уравнения являются корнями второго, то второе уравнение называется *следствием* первого. Следствие, однако, может иметь такие корни, которые не являются корнями первого уравнения.

При решении уравнение можно заменить его следствием. При этом могут появиться посторонние корни, но ни один корень не пропадет. После того как найдены корни следствия, каждый из них следует проверить, подставив в исходное уравнение, и взять лишь те из них, которые ему удовлетворяют.

Преобразования, приводящие к следствию данного уравнения.

1. Умножение обеих частей уравнения на выражение, обращающееся в нуль при некоторых значениях неизвестных.

2. Возведение обеих частей уравнения в целую положительную степень с одним и тем же показателем.

При решении уравнений преобразования следует производить в соответствии с тем множеством чисел, среди которых мы ищем корни (например, среди комплексных чисел или среди действительных).

Пример 1. Решить уравнение

$$x(x^2 + 1) + x^2 + 1 = 0.$$

Если мы рассматриваем действительные корни, то x^2+1 не обращается в нуль и мы можем обе части уравнения разделить на x^2+1. Получим:

$$x+1=0,$$

т. е.

$$x=-1.$$

Если же мы хотим найти и комплексные корни, то, разложив левую часть уравнения на множители

$$(x+1)(x^2+1)=0,$$

получим совокупность уравнений:

$$x^2+1=0;$$

$$x+1=0.$$

Корни: $x_1=i$, $x_2=-i$, $x_3=-1$.

Пример 2. Уравнение

$$x^2-2x+1=4$$

преобразуем к виду

$$(x-1)^2=2^2.$$

При извлечении квадратного корня заменяем уравнение совокупностью двух уравнений:

$$x-1=2;$$

$$x-1=-2.$$

Корни: $x=3$, $x=-1$.

Преобразования, приводящие к системе равносильной данной.

С каждым из уравнений системы можно производить операции, в результате которых получается уравнение, ему равносильное. Кроме того, можно преобразовать систему следующим образом:

1. Решить одно уравнение системы относительно одного из неизвестных и заменить это неизвестное в остальных уравнениях найденным выражением.

В результате получим систему, вообще говоря, равносильную данной. Этот прием называется *методом исключения.*

2. К любому из уравнений системы можно прибавить любое другое, умноженное на любое действительное число α. Благодаря этому можно также исключить

некоторые неизвестные или привести систему к более удобному виду.

б) Алгебраические уравнения с одним неизвестным

Прежде чем приступать к решению алгебраического уравнения, его следует сначала преобразовать по следующей схеме:

1) освободить обе части уравнения от дробей;

2) раскрыть скобки, в которых содержится неизвестное*;

3) все члены перенести в левую часть уравнения;

4) сделать приведение подобных членов. В случае, если неизвестное в одной и той же степени входит в несколько членов с буквенными коэффициентами, вынести это неизвестное за скобки.

1. Уравнение первой степени (линейное). Общий вид:

$$ax + b = 0;$$

$a \neq 0$, a и b — вещественные.

Всегда имеет решение:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Левая часть уравнения называется *линейной функцией* (см. стр. 201 и 235).

2. Уравнение второй степени (квадратное). Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

$a \neq 0$, a, b и c — вещественные.

Решение дается формулой

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

* Если буквенное выражение в скобках не содержит неизвестного, то такие скобки раскрывать не рекомендуется.

Исследование решения:

при $b^2 - 4ac > 0$ уравнение имеет 2 различных действительных корня;

„ $b^2 - 4ac = 0$ „ „ 2 одинаковых действительных корня;

„ $b^2 - 4ac < 0$ „ „ 2 комплексно-сопряженных корня.

Частные случаи квадратного уравнения.

1. Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$, решения:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

б) $ax^2 + bx = 0$, решения: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$.

2. Приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (2)$$

Решение дается формулой:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

3. Квадратное уравнение вида:

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Решение дается формулой:

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a},\quad x_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Теорема Виета для квадратного уравнения. Корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами следующими соотношениями:

а) для уравнения общего вида:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного уравнения:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Разложение квадратного трехчлена. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения (2), то

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с помощью подстановки

$$x = \frac{z - b}{2a}$$

можно привести к *каноническому* виду

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[z^2 - (b^2 - 4ac)].$$

3. Уравнение третьей степени (кубичное). Общий вид:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad (1)$$

где

$a \neq 0$, a, b, c и d — вещественные.

Разделив кубичное уравнение (1) на a и воспользовавшись подстановкой

$$x = y - \frac{1}{3}\frac{b}{a},$$

получим кубичное уравнение в приведенной форме:

$$y^3 + py + q = 0. \qquad (2)$$

При этом коэффициенты уравнений (1) и (2) связаны соотношениями:

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}; \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}.$$

Корни приведенного кубичного уравнения (2) находят по формулам Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \qquad (3)$$

Исследования решения (3) кубичного уравнения (2). Если действительные значения кубичных корней, входящих в формулу (3), обозначить соответственно через A и B, то корни кубичного уравнения (2) в зависимости от значения величины $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ можно отыскать по следующим формулам:

а) при $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$:

$$x_1 = A + B,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{3}}{2}(A - B)\,i,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(A + B) - \frac{\sqrt{3}}{2}(A - B)\,i;$$

б) при $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ (в этом случае $A = B$):

$$x_1 = 2A,$$

$$x_2 = x_3 = -A;$$

в) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ (неприводимый случай):

$$x_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = 2r\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = 2r\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3},$$

где

$$r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}.$$

Частный случай. Симметрическое кубичное уравнение

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0$$

можно представить в виде

$$(x \pm 1)\,[ax^2 + (b \mp a)\,x + a] = 0$$

и свести к решению уравнений первой и второй степени.

4. Уравнение четвертой степени. Общий вид:

$$a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 \mp d_1x + f_1 = 0, \qquad a_1 \neq 0.$$

Разделив на a_1, получим более простое уравнение

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0, \qquad (1)$$

равносильное следующим двум квадратным уравнениям

$$x^2 + (b - A)\frac{x}{2} + \left(y - \frac{by - d}{A}\right) = 0;$$

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0.$$

Здесь

$$A = \sqrt{8y + b^2 - 4c},$$

а y — какой-нибудь действительный корень кубичного уравнения:

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8f)\,y + f\,(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

Если левая часть уравнения (1) разлагается на множители:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

то x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения (1).

5. Биквадратное уравнение. Общий вид:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad a \neq 0$$

(частный случай уравнения четвертой степени).

Заменой неизвестного

$$x^2 = y$$

уравнение приводится к квадратному.

Биквадратное уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ в случае, когда $q > 0$, можно привести к квадратному, поделив обе части его на x^2 и вводя новое неизвестное

$$x + \frac{\sqrt{q}}{x} = y.$$

Последний прием особенно удобен, если q является квадратом рационального числа.

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Знаки перед корнями выбираются независимо друг от друга, т. е. имеют место четыре возможности.

Свойства корней биквадратного уравнения:

1. Если биквадратное уравнение имеет корень α, то оно имеет и корень $-\alpha$.

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

Замечание. Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться *формулой сложного радикала*:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 - B}\right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - B}\right)}.$$

Последняя полезна лишь тогда, если $\sqrt{A^2 - B}$ есть рациональное число. Для биквадратного уравнения это бывает при условии, что выражение $\sqrt{\frac{c}{a}}$ рационально.

6. Возвратное уравнение четвертой степени. Общий вид:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, а m может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Указанное уравнение, если предварительно разделить его на x^2, приводится к виду

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0. \qquad (2)$$

Вводим теперь новое неизвестное

$$y = x + \frac{m}{x}, \qquad (3)$$

тогда $y^2 = x^2 + 2m + \frac{m^2}{x^2}$, следовательно, $x^2 + \frac{m^2}{x^2} = y^2 - 2m$. Подставив в уравнение (2), получим квадратное уравнение относительно неизвестного y:

$$a(y^2 - 2m) + by + c = 0$$

или

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0. \qquad (4)$$

Представляют интерес следующие два частных случая возвратного уравнения четвертой степени:

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(m = 1)$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ $(m = -1)$.

Они называются *симметрическими уравнениями четвертой степени* соответственно *первого* и *второго* рода и решаются точно так же, как и квадратные. Для первого из них вводят новое неизвестное по формуле

$$y = x + \frac{1}{x},$$

а для второго — по формуле $y = x - \frac{1}{x}$.

Свойства корней симметрического уравнения.

1. Если γ — корень симметрического уравнения первого рода, то это уравнение имеет своим корнем и $\frac{1}{\gamma}$. Если γ — корень симметрического уравнения второго рода, то оно имеет своим корнем и $-\frac{1}{\gamma}$.

2. Произведение всех корней симметрического уравнения равно единице (по теореме Виета).

7. Двучленное уравнение. Общий вид:

$$ax^n + b = 0,\ a \neq 0.$$

Разделив на a и обозначив $\left|\frac{b}{a}\right| = A$, получим

$$x^n \pm A = 0,\ A > 0.$$

Для решения двучленного уравнения достаточно найти все корни уравнения $y^n = \pm 1$ и умножить каждый из них на $\sqrt[n]{A}$.

Итак, задача сводится к решению уравнения

$$y^n - 1 = 0 \qquad (1)$$

или

$$y^n + 1 = 0. \qquad (2)$$

В области действительных чисел:

1. При четных n уравнение (1) имеет два действительных корня, а уравнение (2) ни одного.

2. При нечетных n уравнения (1) и (2) имеют по одному действительному корню.

В области комплексных чисел каждое из уравнений (1) и (2) имеет n различных корней, которые нетрудно найти по формуле Муавра (см. стр. 47).

8. Уравнение n-й степени. Общий вид:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1)$$

Основная теорема алгебры. Уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами имеет n комплексных корней, если кратные корни считать разными.

Если $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — корни уравнения (1), то левую часть его можно представить в виде

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n). \qquad (2)$$

Теорема Виета. Корни x_1, x_2, x_3, ..., x_n уравнения (1) связаны с коэффициентами последнего следующими соотношениями:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0},$$

. . . . . .

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Общей алгебраической формулы для отыскания корней уравнения выше четвертой степени не существует и существовать не может. Корни уравнений высоких степеней можно найти приближенно с любой степенью точности.

9. Трехчленное уравнение. Общий вид:

$$ax^{2n}+bx^n+c=0. \qquad (1)$$

При $n=2$ это уравнение является биквадратным. Это уравнение равносильно следующим двум:

$$x^n=y;\ ay^2+by+c=0.$$

10. Дробное уравнение. Дробное алгебраическое уравнение с помощью тождественных преобразований можно привести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Уравнение $P(x)=0$ является следствием уравнения (1). Найдя корни $P(x)$, берем те из них, которые удовлетворяют уравнению (1).

11. Иррациональные уравнения. *Иррациональным* называется уравнение в котором алгебраическое выражение, содержащее неизвестное, находится под знаком корня. Оно может быть преобразовано в целое алгебраическое уравнение, являющееся следствием данного.

Проверка решений полученного целого уравнения необходима.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}+x=2.$$

Оставляем в левой стороне только радикал, перенеся остальные члены в правую часть уравнения:

$$\sqrt{x+2}=2-x.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x+2=4-4x+x^2;$$

$$x^2-5x+2=0.$$

Последнему уравнению удовлетворяют два значения неизвестного:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2},\quad x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Проверка.

$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ не является корнем исходного уравнения, так как

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}+\frac{5+\sqrt{17}}{2}>2.$$

Пользуясь формулой сложного радикала (см. стр. 53, пример), найдем, что

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}+2}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}+$$

$$+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=2.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет только один действительный корень $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+10}=0.$$

Можно поступить, как в примере 1, но здесь легко непосредственно заметить, что уравнение не имеет корней, так как

$$\sqrt{x+2} \geqslant 0 \text{ и } \sqrt{x+10} \geqslant 0$$

(мы рассматриваем только арифметические корни!). Равенство нулю в этих неравенствах не может быть достигнуто одновременно.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+10} = 4.$$

Первый способ. Переносим один радикал в правую часть равенства и возводим обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{x+2} = 4 - \sqrt{x+10};$$

$$x + 2 = 16 - 8\sqrt{x+10} + x + 10;$$

$$\sqrt{x+10} = 3.$$

Последнее уравнение снова возводим в квадрат и находим

$$x = -1.$$

Проверка подтверждает, что единственное значение $x = -1$ является корнем:

$$\sqrt{-1+2} + \sqrt{-1+10} = 1 + 3 = 4.$$

Второй способ. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(x+10)} + x + 10 = 16;$$

$$\sqrt{(x+2)(x+10)} + x = 2.$$

Уединяем радикал и снова возводим в квадрат обе части уравнения:

$$(x+2)(x+10) = 4 - 4x + x^2;$$

$$12x + 20 = 4 - 4x;$$

$$x = -1.$$

Мы снова нашли тот же корень уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x^2-9x+8}+x=2.$$

Уединяем радикал и возводим обе части уравнения в куб:

$$\sqrt[3]{2x^2-9x+8}=2-x;$$

$$2x^2-9x+8=8-12x+6x^2-x^3;$$

$$x^3-4x^2+3x=0;$$

$$x_1=0;\ x^2-4x+3=0;$$

$$x_2=1;\ x_3=3.$$

Проверкой убеждаемся, что все три значения являются корнями.

Замечание. В примере 4 проверка была, по сути дела, лишней, так как возведение в куб (и любую нечетную степень) не влечет приобретения новых действительных корней.

в) Трансцендентные уравнения

Ниже на конкретных примерах приведены способы решения показательных и логарифмических уравнений. К числу трансцендентных относятся также и тригонометрические уравнения, о которых см. на стр. 183.

1. Показательные уравнения. *Показательными* называются уравнения, содержащие неизвестные в показателе степени.

Первый способ. Приведение уравнения к равенству степеней с одинаковым основанием.

Пример 1. $3^x9^{-x}=81$.

Если это уравнение имеет решение, то

$$3^x3^{2x}=3^4 \text{ или } 3^{3x}=3^4.$$

Степени числа 3 равны, следовательно, равны и их показатели:

$$3x=4,$$

откуда

$$x=\frac{4}{3}.$$

Так как уравнение решалось в предположении существования решения, то необходима проверка, после которой убеждаемся, что $x = \frac{4}{3}$ — корень уравнения.

Второй способ. Вынесение за скобку.

Пример 2. $5^{2x+1} + 2 \cdot 5^{2x} + 5^{2x-1} = 900$.

Предположим, что уравнение имеет решение. Выносим за скобки 5^{2x-1} и получаем

$$5^{2x-1}(25 + 10 + 1) = 900,$$

так как $900 = 36 \cdot 5^2$, то $5^{2x-1} = 5^2$. Следовательно, $2x - 1 = 2$, откуда $x = \frac{1}{2}$.

Проверка показывает, что $x = \frac{1}{2}$ — корень данного уравнения.

Третий способ. Введение вспомогательного неизвестного.

Пример 3. $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$.

Предположим, что уравнение имеет решение. Положив $3^x = y$, получим

$$y^2 - 8y - 9 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 9; \; y_2 = -1.$$

Второе значение не является корнем исходного уравнения, так как 3^x не может быть отрицательным.

Остается: $3^x = 9$, откуда $x = 2$.

Проверка показывает, что $x = 2$ — корень исходного уравнения.

Четвертый способ. Логарифмирование.

Пример 4. $7^x = 23$.

Это уравнение имеет единственное решение (см. свойство 4 показательной функции). Логарифмируя обе части уравнения, получаем

$$x \lg 7 = \lg 23, \quad \text{откуда } x = \frac{\lg 23}{\lg 7}.$$

2. Логарифмические уравнения. *Логарифмическими* называются уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма.

Первый способ. Потенцирование.

Пример 1. $\lg(x^2+17x+6)-\lg(2x+1)=1.$

Предположим, что уравнение имеет решение. Тогда

$$\lg\frac{x^2+17x+6}{2x+1}=\lg 10;$$

$$\frac{x^2+17x+6}{2x+1}=10;\quad x^2-3x-4=0;$$

$$x_1=4;\ x_2=-1.$$

Второе значение не является корнем, так как $2x+1$ при $x=-1$ меньше нуля, а вещественного логарифма отрицательного числа не существует.

$x=4$ — корень исходного уравнения, в чем убеждаемся проверкой.

Второй способ. Введение вспомогательного неизвестного.

Пример 2. $$\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1.$$

Предположив, что решение существует, положим

$$\lg x=y.$$

Тогда

$$\frac{1}{5-y}+\frac{2}{1+y}=1,$$

откуда $y_1=3$, $y_2=2$, т. е. $x_1=10^3$, $x_2=10^2$. Проверка показывает, что эти корни удовлетворяют уравнению.

г) Системы алгебраических уравнений

1. Метод Гаусса исключения неизвестных. Наиболее распространенным и, пожалуй, самым простым способом решения систем линейных уравнений является *метод Гаусса исключения неизвестных*. При решении линейных уравнений этим методом используются следующие преобразования, приводящие к равносильной системе уравнений:

1) перестановка двух уравнений;

2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответственных частей другого уравнения, умноженных на любое число.

„Исключение неизвестных" означает построение равносильной системы линейных уравнений, имеющей ступенчатый вид, т. е. x_1 может содержаться не более чем в одном уравнении, x_2 не более чем в двух, x_k не более чем в k уравнениях.

Ниже на примерах подробно разобраны техника вычислений и все случаи, которые могут при этом встретиться.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Так как преобразования системы уравнений, о которых говорилось выше, не изменяют корней системы и сохраняют ее общий вид, то мы будем записывать вместо уравнений лишь их коэффициенты, расположенные в строку. Если некоторые неизвестные в уравнении отсутствуют, это означает, что коэффициент при них равен нулю и мы записываем в строке на соответствующем месте нуль. При этом свободные члены будем отделять чертой.

Дальше все преобразования над уравнениями будем переносить на строки соответствующей таблицы.

Исключим неизвестное x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений. Умножив первое уравнение на -2 и прибавив его ко второму, мы получим уравнение, не содержащее x_1. Аналогичный результат получится, если умножить первое уравнение на -3 и -2 и прибавить соответственно к третьему и четвертому уравнениям системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Теперь из четвертого и третьего уравнений исключается x_2. Для этого второе уравнение (вторая строка) умножается на $-\frac{4}{5}$ *(множитель равен отношению соответствующих коэффициентов, взятому с обратным знаком)* и прибавляется к третьему, затем на $-\frac{7}{5}$ и прибавляется к четвертому:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 7{,}2 & 3{,}6 & -14{,}4 \end{array}\right).$$

Наконец, исключаем x_3 из четвертого уравнения, прибавляя к нему третье, умноженное на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right).$$

В результате мы получили систему ступенчатого вида:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6; \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 &= -4; \\ -x_3 + 2x_4 &= -3; \\ x_4 &= -2, \end{aligned}$$

которую легко решить, подставляя в каждое уравнение результат решения всех уравнений, расположенных под ним:

$$x_4 = -2;$$

$$x_3 = 3 + 2(-2) = -1;$$

$$x_2 = \frac{4 - 2 - 8(-1)}{5} = 2;$$

$$x_1 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1.$$

Если система несовместна (т. е. составляющие ее уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получится абсурдное равенство типа $1 = 0$. Обратно: если мы получили уравнение $1 = 0$ (вместо единицы в левой части может стоять любое другое число, не равное нулю), то система несовместна.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 14. \end{aligned}$$

Исключая последовательно x_1 и x_2, получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -8{,}8 \end{array}\right).$$

(Символ $\sim$ означает, что системы уравнений, соответствующие этим таблицам эквивалентны.)

Вычитаем из четвертого уравнения третье:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6; \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 &= -4; \\ -3{,}6x_3 + 7{,}2x_4 &= -10{,}8; \\ 0 &= 2, \end{aligned}$$

в которой последнее уравнение абсурдно. Следовательно, исходная система несовместна.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

Осуществляя последовательное исключение неизвестных, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \end{array}\right).$$

Мы видим, что третье и четвертое уравнения совершенно одинаковы. Поэтому, продолжая процесс исключения дальше, т. е. вычитая из четвертого уравнения третье, мы получим систему

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6; \\ -5x_2 - 8x_3 - x_4 &= -4; \\ -3{,}6x_3 + 7{,}2x_4 &= -10{,}8; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение является очевидным тождеством и его можно отбросить, третье уравнение можно сократить на 3,6:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6; \\ -5x_2 - 8x_3 - x_4 &= -4; \\ -x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Считая, что значение неизвестной x_4 задано, выразим через x_4 все остальные неизвестные:

$$x_3 = 2x_4 + 3;$$

$$x_2 = \frac{4 - x_4 - 8(2x_4 + 3)}{5} = -4 - 3{,}4x_4;$$

$$x_1 = 2(4 + 3{,}4x_4) + 3(2x_4 + 3) - 2x_4 + 6 = 23 - 10{,}8x_4.$$

Ниже показано, как используются для исследования систем линейных уравнений определители.

2. Определители. *Определителем второго порядка* называется выражение D, образованное из 4 элементов a_{ij}, расположенных в квадратную таблицу:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Первый индекс i у числа a_{ij} указывает номер строки, в которой находится число, а второй индекс j — номер столбца.

Определители второго порядка вычисляются по правилу

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

9 элементов a_{ij}, расположенные в квадратную таблицу

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуют *определитель третьего порядка.*

Определитель второго порядка, полученный из определителя третьего порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, называется *минором* этого элемента. Минор элемента a_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} и обозначается A_{ij}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{21}$$

Каждый определитель третьего порядка можно *разложить по элементам* строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

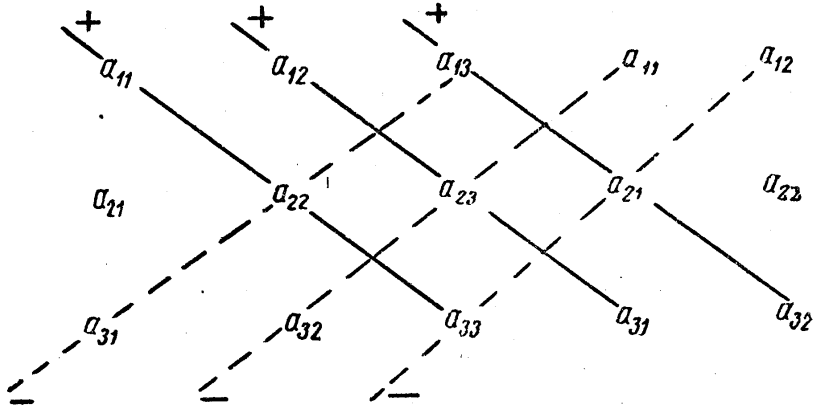
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Используя это свойство, можно вычислить определитель четвертого порядка, сведя его к четырем определителям третьего порядка, и т. д.

Определитель третьего порядка можно непосредственно вычислить по следующей схеме:

к элементам определителя приписываются справа два первых столбца и находится алгебраическая сумма произведений „диагональных“ элементов



$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

3. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Общий вид: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$

Определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1. Если $D \neq 0$, то система совместна и всегда имеет решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

2. Если $D = 0$ и $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0$,

то система неопределенна, так как тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$

т. е. второе уравнение системы получается из первого умножением на k. Система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными, имеющему бесконечно много решений: достаточно задать произвольно y, как мы найдем соответствующее x или обратно: по заданному x найдется соответствующее y.

3. Определитель $D = 0$, а один из определителей

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. В этом случае система противоречива и не имеет решения.

Пример 1. Найти решения системы

$$\begin{cases} 2x + y = 1; \\ y + 2x = 2. \end{cases}$$

Находим

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1.$$

Пример 2. Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 4x + 2y = 2. \end{cases}$$

Находим:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Второе уравнение получено из первого умножением на 2.

Система сводится к одному уравнению $2x + y = 1$ или $y = 1 - 2x$ и, следовательно, имеет бесчисленное множество решений.

По заданному значению x всегда можно найти соответствующее ему значение y.

Пример 3. Найти решение системы:

$$\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

Находим:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Уравнения противоречивы, что, впрочем, видно и так. Система не имеет решений.

4. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Общий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

1. Если $D \neq 0$, то система совместна и всегда имеет решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

2. Если $D = 0$ и все три определителя, стоящие в числителях, тоже равны нулю, то система неопределенна. Она сводится к двум или к одному уравнению с тремя неизвестными.

Задавая одно или два неизвестных, решаем затем либо систему двух уравнений с двумя неизвестными, либо одно уравнение с одним неизвестным.

3. $D = 0$, один из определителей, стоящих в числителе, не равен нулю. Уравнение противоречиво.

Пример 1. Найти решение системы:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1; \\ x + 3y + 2z = 2; \\ 2x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

Находим:

$$D=\begin{vmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{vmatrix}=18\neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&1&3\end{vmatrix}}{18}=0;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&2\\2&3&3\end{vmatrix}}{18}=0;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{vmatrix}}{18}=1.$$

Пример 2. Найти решение системы

$$\begin{cases}3x+2y+z=1;\\ x+3y+2z=2;\\ 4x+5y+3z=3.\end{cases}$$

Находим:

$$D=\begin{vmatrix}3&2&1\\1&3&2\\4&5&3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&5&3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&2\\4&3&3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}3&2&1\\1&3&2\\4&5&3\end{vmatrix}=0.$$

Система неопределенна и, следовательно, имеет бесчисленное множество решений. Нетрудно заметить, что последнее уравнение есть сумма первых двух.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}3x+2y+z=1;\\ x+3y+2z=2;\end{cases}\quad \text{так как}\quad \begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7\neq 0,$$

то систему можно решать относительно x и y, считая z известным:

$$\begin{cases}3x+2y=1-z;\\ x+3y=2(1-z).\end{cases}$$

Находим:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1-z & 2\\ 2(1-z) & 3\end{vmatrix}}{7}=\frac{z-1}{7};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1-z\\ 1 & 2(1-z)\end{vmatrix}}{7}=\frac{5(1-z)}{7}.$$

Пример 3. Найти решение системы

$$\begin{cases}3x+2y+z=1;\\ 3x+2y+z=2;\\ 2x+y+z=4.\end{cases}$$

Находим:

$$D=0;\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Система противоречива и, следовательно, не имеет решений.

5. Простейшие системы, содержащие уравнения второй степени. Способы решения показаны на конкретных примерах систем, наиболее часто встречающихся на практике.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases}x+y=p;\\ xy=q.\end{cases}\qquad (1)$$

Решение. *Первый способ.* На основе теоремы, обратной теореме Виета, легко устанавливаем, что данная система равносильна квадратному уравнению

$$z^2-pz+q=0,$$

имеющему два корня:

$$z_1=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\qquad z_2=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

При $p^2 > 4q$ система (1) имеет два решения:

$$\text{I} \begin{cases} x = z_1; \\ y = z_2; \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x = z_2; \\ y = z_1. \end{cases}$$

Второй способ. Из возведенного в квадрат первого уравнения системы (1) вычтем учетверенное второе; получим

$$(x - y)^2 = p^2 - 4q; \text{ откуда } x - y = \pm \sqrt{p^2 - 4q}\,.$$

Далее решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p; \\ x - y = \pm \sqrt{p^2 - 4q}\,, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной. Находим два решения: x_1, y_1 и x_2, y_2, где

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; \quad y_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (2)$$

и оставляем лишь те, которые удовлетворяют исходной системе.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x - y = p; \\ xy = q. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) с помощью замены неизвестного

$$u = -y$$

сводится к системе

$$\begin{cases} x + u = p; \\ xu = -q, \end{cases}$$

отличающейся от системы (1) лишь обозначениями неизвестного.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p; \\ x^2 + y^2 = q. \end{cases} \qquad (4)$$

Из возведенного в квадрат первого уравнения вычитаем второе; получим

$$xy = \frac{p^2 - q}{2}.$$

Затем решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p; \\ xy = \dfrac{p^2 - q}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

являющуюся следствием исходной системы (4). Таким образом, система (4) легко сводится к системе (1).

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p; \\ x^2 - y^2 = q. \end{cases} \tag{6}$$

Если $p \neq 0$, то, разделив второе уравнение на первое, получим

$$x - y = \frac{q}{p}.$$

Затем решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p; \\ x - y = \dfrac{q}{p}, \end{cases}$$

равносильную исходной. Получим

$$x = \frac{1}{2}\left(p + \frac{q}{p}\right); \qquad y = \frac{1}{2}\left(p - \frac{q}{p}\right).$$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p; \\ xy = q. \end{cases} \tag{7}$$

К первому уравнению прибавим удвоенное второе; затем из первого уравнения вычтем удвоенное второе. Получим систему

$$\begin{cases} (x + y)^2 = p + 2q; \\ (x - y)^2 = p - 2q, \end{cases} \tag{8}$$

равносильную исходной. Из системы (8) получаем четыре системы:

$$\text{I}\begin{cases} x+y=\sqrt{p+2q}; \\ x-y=\sqrt{p-2q}; \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} x+y=-\sqrt{p+2q}; \\ x-y=\sqrt{p-2q}; \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} x+y=\sqrt{p+2q}; \\ x-y=-\sqrt{p-2q}; \end{cases} \qquad \text{IV}\begin{cases} x+y=-\sqrt{p+2q}; \\ x-y=-\sqrt{p-2q}, \end{cases}$$

каждая из которых дает одно решение системы (7).

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=p; \\ xy=q. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) легко сводится к системе (3). Для этого достаточно возвести второе уравнение в квадрат и произвести затем замену неизвестных:

$$x^2=u; \qquad y^2=v.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} u-v=p; \\ uv=q, \end{cases} \tag{10}$$

являющуюся следствием исходной системы (9).

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=0; \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=0. \end{cases} \tag{11}$$

Одним из решений системы (11) является

$$x=0; \qquad y=0.$$

Положив затем $x\neq 0$, разделив обе части первого уравнения на x^2 и, вводя новое неизвестное

$$\frac{y}{x}=u,$$

получим квадратное уравнение

$$a_1+b_1u+c_1u^2=0$$

относительно неизвестного u; пусть u_1 и u_2 — его корни; решение системы (11) сводится к решению двух систем:

$$\text{I}\begin{cases} y = u_1 x; \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0; \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} y = u_2 x; \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0, \end{cases} \tag{11'}$$

которые можно легко решить способом подстановки.

Таким образом, система (11) имеет 5 решений: $x = 0$, $y = 0$ и 4 решения системы (11').

Г. Неравенства

а) Общие сведения

1. Определения. *Неравенством* называется выражение, полученное посредством соединения знаком $<$ (меньше) или $>$ (больше) двух алгебраических выражений.

Знак неравенства всегда обращен вершиной угла в сторону меньшей из сравниваемых величин. Кроме „точных" неравенств, рассматривают и соотношения, допускающие равенство: $\leqslant$ (меньше или равно), $\geqslant$ (больше или равно).

2. Свойства и преобразования неравенств.

1) Если $a > b$, то

$$\left.\begin{aligned} a+p &> b+p; \\ a-p &> b-p; \end{aligned}\right\} p \text{ — произвольное}$$

$$ap > bp \text{ при } p > 0;$$

$$ap < bp \text{ „ } p < 0;$$

$$\frac{a}{p} > \frac{b}{p} \text{ при } p > 0;$$

$$\frac{a}{p} < \frac{b}{p} \text{ „ } p < 0.$$

2) Если $0 < a < b$; то

$$a^p < b^p \text{ при } p > 0;$$

$$a^p > b^p \text{ „ } p < 0;$$

$$\log_a p > \log_b p$$

при $b > a > 1$; $p > 0$;

$$\log_a p < \log_b p$$

при $a < b < 1$; $p > 0$;

$$\log_p a < \log_p b \text{ при } p > 1;$$

$$\log_p a > \log_p b \text{ при } 0 < p < 1.$$

3) Если $a > b$, $c > d$, то

$$a + c > b + d;$$

$$a - d > b - c.$$

4) Если $a > b > 0$; $c > d > 0$, то

$$ac > bd;$$

$$\frac{a}{d} > \frac{b}{c}.$$

Следствие из свойства 1. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

Замечание. При умножении обеих частей неравенства на нуль оно превращается в равенство.

3. Система и совокупность неравенств. *Решить* неравенство — значит найти значения неизвестных, при которых это неравенство выполняется. Два неравенства называются *эквивалентными*, если их решения совпадают.

Перечисленные в п. 2 элементарные преобразования неравенств приводят к эквивалентным неравенствам.

Неравенства образуют *совокупность*, если их решения объединяются, т. е. к решениям первого присоединяются решения второго, третьего и т. д.

Мы говорим о *системе* неравенств, если требуется найти все решения, удовлетворяющие одновременно всем данным неравенствам.

б) Решение неравенств

1. Неравенство первой степени (линейное)

$$ax + b > 0 \qquad (1)$$

имеет решение:

$$x > -\frac{b}{a} \text{ при } a > 0;$$

$$x < -\frac{b}{a} \text{ при } a < 0.$$

Геометрически решение линейного неравенства (1) представляет собой луч, исходящий из точки $-\frac{b}{a}$ и направленный вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$ (рис. 11*а*).

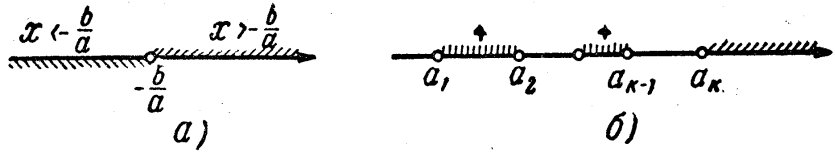


Рис. 11

2. Неравенство n-й степени. Неравенство

$$P(x) > 0,$$

где $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, решают при помощи разложения левой части на линейные действительные множители и на неразложимые множители второй степени (см. стр. 58). Последние не обращаются в нуль и, следовательно, сохраняют один и тот же знак при любом значении x. Поэтому на них можно сократить данное неравенство (с учетом знака!). В результате получим равносильное неравенство

$$P^*(x) = (x - a_1)\ (x - a_2) \ldots (x - a_k) > 0.$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ занумерованы в нем в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Расположим их на числовой оси (рис. 11$б$). При $x > a_k$ $P^*(x) > 0$, так как все сомножители положительны. При переходе через каждый корень a_i многочлен $P^*(x)$ меняет знак. Поэтому во всех остальных интервалах знаки чередуются.

Итак, интервалы

$$x > a_k,\ \ a_{k-1} > x > a_{k-2}, \ldots$$

составляют решение данного неравенства.

Пример. Решить неравенство

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x^2 + 1) > 0.$$

Так как $x^2 + 1$ всегда положительно, то данное неравенство равносильно следующему:

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5) > 0.$$

Здесь корни $-2, 1, 3, 5$ многочлена в левой части неравенства расположены в порядке возрастания на числовой оси (рис. 12). При $x > 5$ многочлен положителен, так как каждое выражение в скобках положи-

тельно. Далее знаки чередуются. Итак, решение определяется совокупностью неравенств:

$$x < -2, \quad 1 < x < 3, \quad 5 < x.$$

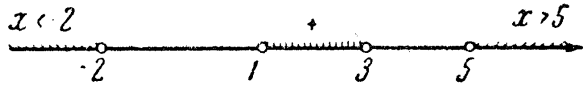


Рис. 12

Замечание. Если в разложение многочлена входят кратные линейные множители, то нужно сократить неравенство на их четную степень, отметив лишь точку, соответствующую корню.

Пример. Решить неравенство:

$$(x+3)^3(x+1)\ (x-1)^2(x-2)\ (x-5) > 0.$$

Сокращаем неравенство на $(x+3)^2(x-1)^2$, запоминая, что $x \neq 1$ (так как один множитель $x+3$ остается, то требовать $x \neq -3$ излишне):

$$(x+3)\ (x+1)\ (x-2)\ (x-5) > 0, \ x \neq 1.$$

Расположим корни левой части последнего неравенства на числовой оси, а число $x=1$ отметим крестиком (рис. 13).

При $x > 5$ неравенство выполняется, так как все сомножители положительны. Дальше знаки чередуются.

Решения таковы:

$$x < -3, \quad -1 < x < 1, \quad 1 < x < 2, \quad 5 < x.$$

3. Неравенство второй степени (квадратное):

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0$$

— частный случай рассмотренного выше. В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ и от знака коэффициента a получим шесть различных вариантов (рис. 14).

4. Некоторые важные неравенства.

$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (среднее арифметическое больше среднего геометрического).

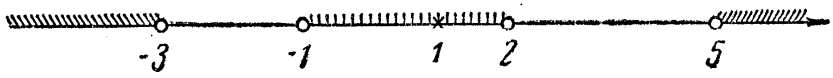


Рис. 13

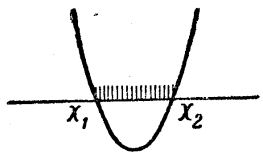
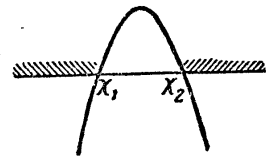
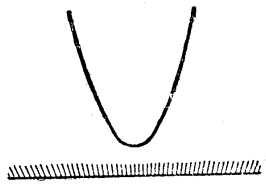
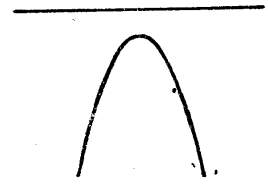
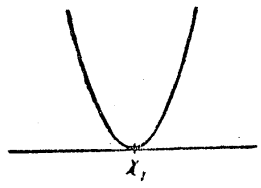
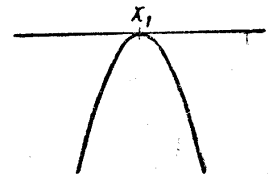
	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x_1 < x < x_2$	 $x < x_1$, $x > x_2$
$D < 0$	 $-\infty < x < +\infty$	 решений нет
$D = 0$	 $x = x_1$	 $x = x_1$

Рис. 14

$$(\alpha+1)^n > 1+n\alpha \quad (\alpha > 0).$$

$$\delta = [(\delta-1)+1]^n > 1+n(\delta-1), \quad (\delta > 1)$$

(неравенство Я. Бернулли).

$$\delta^{\frac{1}{n}} > 1+\frac{\delta-1}{n}, \quad \delta^{\frac{1}{n}}-1 > \frac{\delta-1}{n}.$$

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} \quad (n > 0).$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Д. Числовые последовательности

1. Понятие последовательности. Примеры. Простейшим примером последовательности служит последовательность всех натуральных чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \qquad (1)$$

Любую другую последовательность мы будем рассматривать как функцию последовательности (1), т. е. члены любой последовательности окажутся занумерованными в том порядке, в котором они расположены:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \qquad (2)$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами* последовательности;

u_1 — ее первый член, u_n — общий член.

Иногда последовательность (2) кратко обозначают $\{u_n\}$.

Пример 1. Последовательность всех чисел, обратных натуральным:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Пример 2. Последовательность всех четных чисел:

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

Пример 3. Последовательность всех простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots, F(n), \ldots$$

Обычно последовательность задается указанием зависимости ее n-го члена от числа n, которому этот член соответствует (формула общего члена). Так сделано в примерах 1 и 2.

Однако не всегда такое задание последовательности возможно. Например, общей формулы для всех простых чисел (пример 3) не найдено.

Некоторые члены последовательности могут быть равны между собой.

Пример 4. Последовательность

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

имеет равные члены.

Пример 5. В последовательности

$$1, 2, 3, 0, 4, 5, 6, 0, 7, 8, 9, 0, \ldots$$

равны между собой члены, номера которых кратны четырем.

1. Последовательность называется *возрастающей* (*убывающей*), если ее члены расположены в порядке возрастания (убывания). Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными*.

Последовательность в примере 1 убывающая, а последовательности в примерах 2 и 3 возрастающие. Последовательности в примерах 4 и 5 немонотонные.

2. Если существует такое положительное число M, что все члены последовательности по абсолютной величине меньше числа M, то последовательность называется *ограниченной* (пример 1). В противном случае последовательность называется *неограниченной* (пример 2).

3. Последовательность называется *постоянной*, если все члены ее равны между собой. Постоянная последовательность монотонна.

2. Арифметическая прогрессия. Последовательность, общий член которой выражается через первый член формулой

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

называется *арифметической прогрессией*.

Число d есть постоянная величина для данной прогрессии и называется *разностью* арифметической прогрессии.

Свойства.

1. Разность между любыми двумя соседними членами прогрессии (из последующего вычитается предыдущий) равна d:

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

2. $a_n + a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2}$.

3. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

S_n — сумма n подряд стоящих членов прогрессии, начиная с a_1:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{[2a_1 + d\,(n-1)]n}{2}.$$

Из пяти величин a_1, a_n, d, S_n, n любые три вполне определяют арифметическую прогрессию.

3. Геометрическая прогрессия. Последовательность, общий член которой выражается через первый формулой

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

называется *геометрической прогрессией.*

Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Свойства.

1. Частное от деления двух соседних членов (последующий делится на предыдущий) равно q:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

2. $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$.

3. $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$.

S_n — сумма n подряд стоящих членов прогрессии начиная с a_1:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Из пяти величин a_1, a_n, q, S_n, n любые три вполне определяют геометрическую прогрессию.

4. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Геометрическая прогрессия, знаменатель которой меньше единицы ($q < 1$), а количество членов неограниченно возрастает, называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией.*

Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии конечна:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Многие признаки сходимости рядов (см. стр. 298) получаются в результате использования этого свойства.

Е. Логарифмы

1. Определение. *Логарифмом числа N по основанию a* называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить число N.

Обозначение:

$$x = \log_a N.$$

Из определения логарифма следует:

$$a^x = N, \text{ т. е. } a^{\log_a N} = N.$$

Последнее равенство называется *основным логарифмическим тождеством.*

Из определения логарифма имеем следующие ограничения:

$$a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0.$$

Замечание. Хотя определение логарифма и позволяет отыскать, например, $\log_{-2}(-8)$, мы не будем, однако, рассматривать логарифмы от отрицательных чисел, так как в области действительных чисел они имеют смысл лишь в частных случаях.

2. Свойства логарифмов.

1. Логарифм единицы при любом основании* равен нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

---

* Говоря „при любом основании", здесь и дальше мы имеем в виду ограничения: $a > 0$, $a \neq 1$.

2. Логарифмы чисел, меньших (больших) единицы, при основании, большем (меньшем) единицы, — отрицательны.

3. Логарифмы чисел, больших (меньших) единицы, при основании большем (меньшем) единицы — положительны.

4. При основании, большем единицы, большему числу соответствует больший логарифм.

5. При основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм

6. *Логарифм произведения* равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log_a N_1 N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

7. *Логарифм частного* равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

8. *Логарифм степени* равен логарифму модуля основания, умноженному на показатель степени:

$$\log_a (N^n) = n \log_a |N|.$$

9. *Логарифм корня* равен логарифму модуля подкоренного числа, деленному на показатель корня:

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{\log_a |N|}{n}.$$

10. Зависимость между логарифмами с различными основаниями:

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N.$$

Множитель $M = \frac{1}{\log_a b}$ называется *модулем перехода* от логарифмов при основании a к логарифмам при основании b.

11. Из свойства (10) вытекает:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

12. Значение логарифма не изменится, если число, от которого берется логарифм, и основание логарифма возвести в одну и ту же вещественную степень:

$$\log_a N = \log_{a^k} N^k,$$

где k — любое вещественное число.

13. Отношение логарифмов двух чисел, вычисленных при одинаковых основаниях, есть величина постоянная для данных чисел и не зависящая от выбора основания:

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2} = \frac{\log_b N_1}{\log_b N_2}.$$

14. $\log_a N_1 \cdot \log_b N_2 = \log_a N_2 \cdot \log_b N_1$. Это непосредственно следует из предыдущего.

Пример 1. Вычислить:

$$\log_3 125 \cdot \log_5 9.$$

Пользуясь свойством 14, запишем:

$$\log_3 125 \cdot \log_5 9 = \log_5 125 \cdot \log_3 9 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Пример 2. Вычислить:

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9.$$

Пользуясь свойством 14, последовательно находим

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 =$$
$$= \log_4 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 =$$
$$= \log_4 4 \cdot \log_5 5 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 =$$
$$= \ldots = \log_4 4 \cdot \log_5 5 \cdot \log_6 6 \cdot \log_7 7 \cdot \log_8 8 \cdot \log_3 9 = 2.$$

С помощью свойств 6—9 часто удается свести логарифм сложного выражения к результату простых действий над логарифмами входящих в него простых выражений.

Такое преобразование логарифма называется *логарифмированием*.

Пример 3. Найти логарифм выражения:

$$A = \frac{a^5 \sqrt[7]{c^3}}{d^4 \sqrt[5]{fb^3}}.$$

Применяя последовательно свойства 6, 7, 8, 9, 8, получим:

$$\log A = 5\log a - \frac{3}{5}\log b + \frac{3}{7}\log c - 4\log d - \frac{1}{5}\log f.$$

Преобразование, обратное логарифмированию, называется *потенцированием.*

При потенцировании следует свойства 6 — 9 читать справа налево.

3. Десятичные логарифмы. За основание логарифмов в вычислениях обычно принимается число 10, так как мы пользуемся десятичной системой счисления. Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными.*

Обозначение. Вместо $\log_{10} N$ пишут $\lg N$.

Десятичные логарифмы обладают всеми свойствами логарифмов с основанием, большим единицы, и, кроме того, следующими специальными свойствами:

1. Если число является степенью 10 с натуральным показателем n, то десятичный логарифм его равен показателю степени:

$$\lg 10^n = n.$$

2. Если число является степенью 0,1 с натуральным показателем n, то десятичный логарифм его отрицателен и равен $-n$:

$$\lg (0{,}1)^n = \lg 0,\overbrace{0\ldots}^{n-1}1 = n\lg 0{,}1 = -n.$$

3. Если число умножить на 10^n, то его логарифм увеличится на n:

$$\lg 10^n N = n + \lg N.$$

4. Если число разделить на 10^n, то его логарифм уменьшится на n:

$$\lg \frac{N}{10^n} = \lg N - n.$$

5. Из свойств 3 и 4 следует: если в десятичной дроби перенести запятую на n знаков вправо, то логарифм увеличится на n; если перенести запятую на n знаков влево, то логарифм уменьшится на n.

6. Логарифмы рациональных чисел, не являющихся степенями 10 с целыми показателями, иррациональны.

Если действительное число не является целым, то его можно представить в виде суммы целого числа и положительного числа меньше единицы:

$$3{,}7 = 0{,}7 + 3;\ -0{,}5 = -1 + 0{,}5;\ -3{,}7 = -4 + 0{,}3.$$

Такое представление допускает и логарифм любого положительного числа N:

$$\lg N = A + d, \text{ где } A \text{ — целое, } 0 \leqslant d < 1.$$

Целая часть логарифма, записанного в такой форме, называется его *характеристикой*, а положительное число d — его *мантиссой*. При этом если характеристика отрицательна, то минус пишется над ней:

$$-0{,}5 = -1 + 0{,}5 = \overline{1}{,}5;\ -3{,}7 = -4 + 0{,}3 = \overline{4}{,}3.$$

7. Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр в целой части числа:

$$\lg N = (n-1) + d, \text{ где } n \text{ — число цифр } N,\ 0 \leqslant d < 1.$$

8. Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей пишется в десятичном изображении этого числа до первой цифры, отличной от нуля, считая и нуль целых.

Мантиссы логарифмов сведены в таблицы логарифмов (стр. 407).

О натуральных логарифмах см. на стр. 247.

Ж. Комбинаторика. Бином Ньютона

1. Перестановки. Размещения. Сочетания. Комбинаторика рассматривает вопросы, связанные с подсчетом числа всевозможных комбинаций из элементов данного конечного множества.

Перестановки — комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Обозначение: P_n — число всех возможных перестановок из n элементов.

Если все n элементов различны, то число всех возможных перестановок без повторений определяется формулой

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

($n!$ — символ для обозначения произведения n первых чисел натурального ряда. Читается „эн факториал". По определению полагают $0! = 1$).

Если среди n элементов имеется p элементов одного вида, q — другого, r — третьего и т. д., то число всех *перестановок с повторениями* определяется формулой

$$P_n(p, q, r, \ldots) = \frac{n!}{p!\, q!\, r! \ldots}.$$

Пример 1. Сколько четырехзначных чисел можно записать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, если каждая из них входит в изображение числа только один раз?

Решение. Таких четырехзначных чисел будет ровно столько, сколько будет перестановок без повторений из четырех элементов:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно записать при помощи цифр 1 и 2, если каждая из них входит в изображение числа дважды.

Решение. Таких чисел будет:

$$P_4(2, 2) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

Размещения из n элементов по k — комбинации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой. При этом два размещения считаются различными если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

Ооозначение: A_n^k — число всех размещений из n элементов по k. Если среди n элементов нет одинаковых и повторения одного и того же элемента не допускаются, то число размещений без повторений определяется формулой

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$= n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1).$$

Если все n элементов различны, но в размещениях допускаются повторения, то число размещений с повторениями определяется формулой

$$A_n^{k\ (\text{повт})} = n^k.$$

Пример 3. Число двузначных чисел, составленных из трех цифр 1, 2, 3 по две, без повторений равно

$$A_3^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6,$$

а с повторениями равно

$$A_3^{2\ (\text{повт})} = 3^2 = 9.$$

Сочетания из n элементов по k — комбинации по k элементов из данных n, отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом.

Обозначения: C_n^k или $\binom{n}{k}$ — число всех сочетаний из n элементов по k.

Для k различных элементов из n различных

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

Для k с повторениями из n различных

$$C_n^{k\ (\text{повт})} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Для положительных целых n справедливы соотношения:

$$C_n^r = \begin{cases} C_n^{n-r} & \text{при } r < n; \\ 0 & \text{при } r > n; \end{cases}$$

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1};$$

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_{n-1}^r + C_{n-2}^r + \ldots + C_r^r.$$

Соотношения между числом размещений, сочетаний и перестановок:

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

2. Бином Ньютона. Используя свойства сочетаний, можно для целых положительных n получить формулу

$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 \pm$$

$$\pm C_n^3 x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 \pm$$

$$\pm \binom{n}{3} x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Во второй и третьей формулах для симметрии мы определили

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Частные случаи:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2;$$

$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3;$$

$$(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4;$$

. . . . . .

Биномиальные коэффициенты $C_n^k = \binom{n}{k}$ легко можно определить при помощи *треугольника Паскаля:*

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

. . . . . .

Каждый элемент нижней строки получается в результате сложения двух элементов верхней строки, стоящих левее и правее его. В качестве основы берется треугольник из единиц.

3. Свойства разложения по формуле бинома Ньютона.

1. Члены разложения расположены по убывающим степеням буквы x и по возрастающим степеням буквы a. Сумма показателей при x и a в каждом члене одинакова и равна n — показателю степени бинома.

2. Число членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

3. Формула общего члена разложения $(x+a)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k.$$

4. Коэффициенты крайних членов разложения и членов, равноудаленных от них, равны между собой.

5. Сумма коэффициентов разложения $(x+a)^n$:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

6. Сумма коэффициентов разложения $(x-a)^n$:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} +$$

$$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$$

7. Сумма коэффициентов членов разложения $(x+a)^n$, находящихся на четных местах, равна сумме коэффициентов членов, находящихся на нечетных местах.

3. Элементы математической логики

а) Множества

Понятие множества — одно из основных понятий математики. Оно не может быть формально определено, и мы лишь поясняем это понятие, указывая на его свойства.

1. Определения. Действия над множествами

1. Множество состоит из объектов, называемых *элементами множества.*

Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, обозначается так: $a \in A$.

2. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* или *нуль-множеством*; обозначение: $\varnothing$.

3. Если каждый элемент из множества A является одновременно элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B. По аналогии со знаками неравенства пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

4. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е. а) каждый элемент множества A является элементом множества B и б) каждый элемент из B является элементом из A, то множества A и B называют *равными*: $A = B$.

5. Все элементы, которые подлежат рассмотрению, собираются в так называемое универсальное множество I, так что для каждого множества A будет: $A \subset I$.

6. Для двух множеств определяются две операции: объединения $\cup$ и пересечения $\cap$.

$A \cup B$ — *объединение (сложение) множеств* A и B состоит в образовании множества, в которое входит каждый элемент из A и каждый из B. Если элемент одновременно принадлежит и множеству A и множеству B, то в $A \cup B$ он встречается только один раз.

$A \cap B$ — *пересечение (умножение) множеств* A и B есть множество, состоящее из элементов, общих A и B.

7. $\overline{A}$ — *дополнение* множества A (относительно I) состоит из элементов I, не принадлежащих множеству A.

2. Некоторые свойства множеств. Приведем свойства множеств, вытекающие из предыдущих определений. Пусть A, B и C — любые множества, составленные из элементов множества I.

1. Коммутативность:

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивность:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4.

$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A.$$

5. Свойства I и $\varnothing$:

$$A \cap I = A;$$
$$A \cup I = I;$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing;$$
$$A \cup \varnothing = A.$$

6. Свойства $\subset$:

$$A \subset (A \cup B);$$
$$(A \cap B) \subset A;$$
$$A \subset I;$$
$$\varnothing \subset A.$$

Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$.
Если $B \subset C$, то $A \cap B = B$.

7. Свойства $\overline{A}$:

$$A \cup \overline{A} = I;$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing;$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

8. Двойственность:

$$\left\{ \begin{array}{c} \cup \text{ и } \cap \\ \varnothing \text{ и } I \\ \subset \text{ и } \supset \end{array} \right\}$$

Если в правильном соотношении каждый из символов $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, I $\subset$ и $\supset$ заменить соответственно на $\cap$, $\cup$, I, $\varnothing$, $\supset$ и $\subset$, то снова получим правильное соотношение.

3. Алгебра символической логики. К алгебре множеств примыкают *алгебра символической логики (Булева алгебра)* и *алгебра переключательных (коммутационных) схем*, которые интересны и сами по себе, и своими многочисленными применениями.

В математической логике под *высказыванием* понимают любое утверждение, которое может быть *истинным* либо *ложным*. Предложения, которые могут быть одновременно истинными и ложными, а также лишь частично истинными, не рассматриваются. Высказывания в математической логике характеризуются только тем, истинны они или ложны без учета их конкретного содержания.

Алгебра множеств	*Математическая логика*	*Переключательные схемы*
$\cup$	$\vee$	$+$
объединение множеств	дизъюнкция (сложение) высказываний	параллельное включение
$\cap$	$\wedge$	$\times$
пересечение множеств	конъюнкция (умножение) высказываний	последовательное включение
$-$	$-$	$'$
дополнение множества	отрицание высказывания	переключение (если было включено, то выключить, и наоборот)

Если высказывание A истинно, то пишут $A = 1$; если A ложно, то $A = 0$. Например, „Кама — приток Волги“ $= 1$, „Миссисипи протекает в Австралии“ $= 0$.

Основные логические операции.

1. *Дизъюнкция* (логическое сложение) двух высказываний A и B есть сложное высказывание $A \vee B$,

которое ложно, если A и B оба ложны, и истинно во всех остальных случаях:

$$0 \vee 0 = 0;$$
$$0 \vee 1 = 1;$$
$$1 \vee 0 = 1;$$
$$1 \vee 1 = 1$$

(сравни с таблицей сложения в двоичной системе счисления на стр. 18).

2. *Конъюнкция* (логическое умножение) двух высказываний A и B есть сложное высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания A и B истинны, и ложно во всех остальных случаях:

$$0 \wedge 0 = 0;$$
$$0 \wedge 1 = 0;$$
$$1 \wedge 0 = 0;$$
$$1 \wedge 1 = 1$$

(сравни с таблицей умножения в двоичной системе счисления на стр. 18).

3. *Отрицание* высказывания A есть сложное высказывание, обозначаемое $\overline{A}$, которое ложно, когда A истинно, и истинно, когда A ложно:

$$\overline{1} = 0,$$
$$\overline{0} = 1.$$

4. *Равнозначность* двух высказываний A и B есть сложное высказывание, обозначаемое $A \sim B$, которое истинно, если оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны, и ложно в остальных случаях:

$$0 \sim 0 = 1;$$
$$0 \sim 1 = 0;$$
$$1 \sim 0 = 0;$$
$$1 \sim 1 = 1.$$

Логическое сложение можно отождествить с союзом *или*, а умножение — с союзом *и*, так как в первом случае для истинности сложного высказывания требуется истинность одного из составляющих A или B, а во втором случае — обоих A и B. Отрицание отождествляется со словом *не*.

Между перечисленными логическими операциями существуют такие связи:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B};$$

$$A \sim B = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B) = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}).$$

Операции логического сложения и умножения и операция равнозначности являются коммутативными и ассоциативными. Кроме того, справедлив распределительный закон для логического умножения по отношению к логическому сложению:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

и логического сложения по отношению к логическому умножению:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Последний закон в обычной алгебре не имеет места; так,

$$3 + (2 \cdot 5) \neq (3 + 2)(3 + 5).$$

Как в алгебре символической логики, так и в алгебре переключательных схем мы можем рассматривать всего два элемента „0“ и „1“, которые соответственно означают „выключено“ и „включено“.

Реализацию сложения и умножения для переключательных схем можно представить себе как соответственно параллельное и последовательное соединение выключателей (рис. 15, *а* и *б*).

Чтобы реализовать отрицание, нам понадобится переключатель, изображенный на рис. 15, *в* справа.

Пользуясь этими элементарными схемами, можно осуществить любую сложную логическую связь. Например, равнозначность A и B будет выглядеть, как на

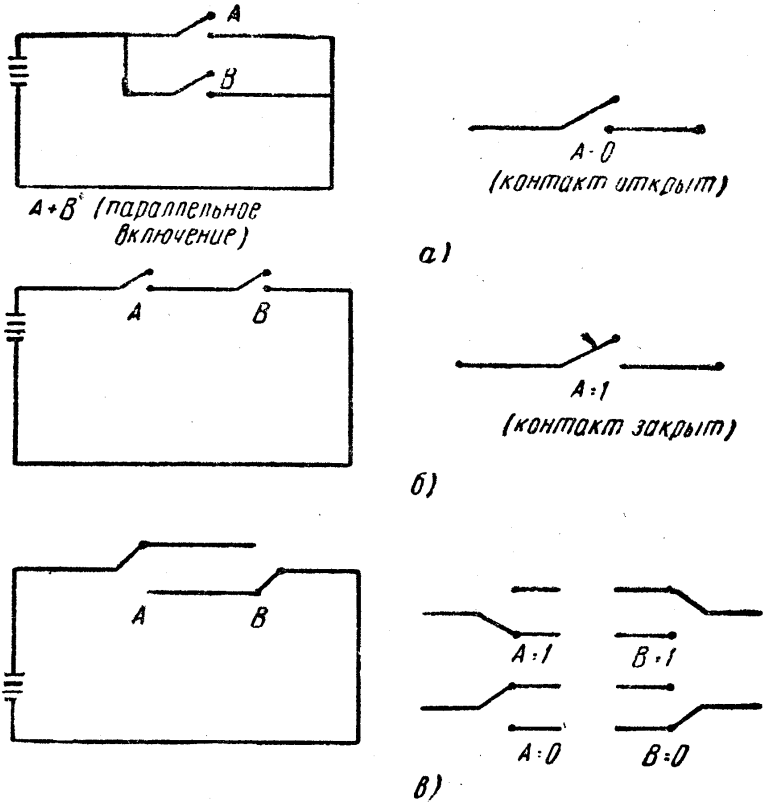

A
B
A+B (параллельное включение)
а)
A·0
(контакт открыт)
A
B
б)
A:1
(контакт закрыт)
A
B
в)
A:1
B:1
A:0
B:0

Рис. 15

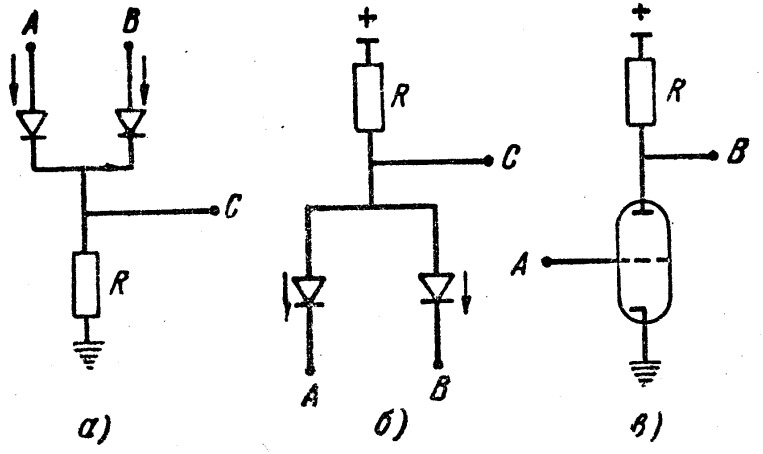

A
B
C
R
а)
+
R
C
A
B
б)
+
R
B
A
в)

Рис. 16

схеме 15, *в*. Действительно, переключатель B аналогичен A, только перевернут (у него заменены полюсы). На схеме 15, *в* осуществлено высказывание

$$(\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}).$$

Такая схема может быть использована для включения и выключения прибора с двух пунктов управления.

Осуществление логических операций в электронных машинах.

1. Логическое сложение (схема совпадения). Схема состоит из двух выпрямителей (диодов), пропускающих ток в одном направлении (оно обозначено стрелками, рис. 16, *а*). Если на один из входов A или B подан сигнал, то сигнал будет и на выходе; если на входах сигнала нет, то он отсутствует и на выходе C.

2. Логическое умножение (схема совпадения) осуществляется при помощи выпрямителей (диодов), расположенных так, как показано на рис. 16, *б*. Если на один из входов A или B напряжение не подано, то выпрямитель будет пропускать ток и на выходе C мы не получим заметного сигнала. Если же на оба входа A и B подано высокое напряжение, то выпрямители оказываются запертыми и сигнал поступает на выход C.

3. Схема отрицания может быть осуществлена при помощи электронной лампы-триода и сопротивления R (рис. 16, *в*). Если сигнал на входе A отсутствует, то лампа заперта и сигнал с источника, преодолев сопротивление R, пойдет на выход B. Если же на входе A есть сигнал, то лампа открыта, ее сопротивление много меньше R, и на выходе B практически нет сигнала.

б) Математическая индукция

1. Определение. Переход от частных результатов к общим осуществляется в математике следующим образом.

Имеется некоторое утверждение A, зависящее определенным образом от числа n, которое принимает целые положительные значения, начиная от p и все большие, чем p. Чтобы доказать справедливость утверждения A, поступают так:

а) убеждаются в справедливости A при $n = p$;

б) предполагают, что A верно при всех n, для которых $p \leqslant n \leqslant k$;

в) исходя из пунктов а) и б) доказывают, что утверждение A справедливо при $n = k + 1$.

Выполнение требований а) и в) позволяет от значения $n = p$, которое берется минимальным из всех возможных, шаг за шагом переходить к значениям $p + 1$, $p + 2$ и так далее. Поэтому мы считаем, что выполнение требований а) и в) влечет за собой справедливость утверждения A для всех $n > p$. Это одна из аксиом натуральных чисел. Она называется *аксиомой индукции.*

Математическая индукция применяется во всех математических дисциплинах.

2. Примеры.

Пример 1. Доказать, что формула n-го члена a_n арифметической прогрессии a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, ..., $a_n = a_{n-1} + d$ имеет вид

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

а) При $n = 1$ имеем

$$a_1 = a_1 + d(1 - 1) = a_1;$$

формула справедлива.

б) Предположим, что данная формула справедлива при всех n таких, что $1 \leqslant n \leqslant k$.

в) Докажем эту формулу для $n = k + 1$, т. е. установим, что верна формула

$$a_{k+1} = a_1 + kd,$$

которая получается из данной заменой n на $k + 1$.

Действительно,

$$a_{k+1} = a_k + d = [a_1 + d(k - 1)] + d =$$

$$= a_1 + dk - d + d = a_1 + dk.$$

В этой цепочке равенств при переходе от второго выражения к третьему использовано предположение индукции б). Из требований а) — в) в силу аксиомы индукции следует, что рассматриваемая формула верна при всех натуральных n.

Пример 2. Доказать тождество (формулу Муавра)

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

а) Для $n = 1$ тождество очевидно.

б) Пусть оно верно при $1 < n < k$, в том числе

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

в) Тогда

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k+1} =$$

$$= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$$

$$= [r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)] [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)].$$

По правилу перемножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеем:

$$[r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)] [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$$

$$= r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi],$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать неравенство

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{n} < \sqrt{a}+1,$$

где $a > 0$, $n \geqslant 2$.

а) Здесь нужно начинать с $n = 2$:

$$\sqrt{a+\sqrt{a}} < \sqrt{a+2\sqrt{a+1}} = \sqrt{(\sqrt{a}+1)^2} =$$

$$= \sqrt{a}+1.$$

б) Предположим, что неравенство верно для $2 \leqslant n \leqslant k$, в том числе и для $n = k$:

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{k} < \sqrt{a}+1.$$

в) Докажем тогда, что

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{k+1} < \sqrt{a}+1.$$

Используя а) и б), получим

$$\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}_{k}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<$$

$$<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1.$$

Тем самым условия для применения индукции обеспечены.

Пример 4. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.

а) Минимальное число углов — три. Поэтому индукция начинается с $n=3$. Для треугольника формула дает $\pi(3-2)=\pi$, т. е. она справедлива.

б) Допустим, что для любого выпуклого n-угольника с числом углов $3 \leqslant n \leqslant k$ формула имеет место.

в) Докажем ее для любого выпуклого $(k+1)$-угольника.

Возьмем три последовательные вершины A, B, C $(k+1)$-угольника и проведем диагональ AC (рис. 17). Она разобьет $(k+1)$-угольник на k-угольник P и треугольник ABC, сумма внутренних углов которых равна сумме внутренних углов данного $(k+1)$-угольника.

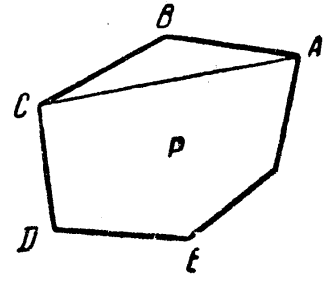


Рис. 17

Так как условия а) и б), выполнены, то

$$\pi(k-1)+\pi=\pi k,$$

именно то, что мы должны получить из данной формулы при $n=k+1$.

3. Замечания.

Замечание 1. Никакое количество проверок не в состоянии заменить математическую индукцию.

Действительно, можно написать подряд любое (но конечное!) число множителей:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

перемножить их и предложить убедиться, что полученный многочлен имеет своими корнями все натуральные числа. Ясно, что простые подстановки не приведут к результату при n достаточно большом.

Замечание 2. Все требования а), б) и в) одинаково существенны. Особенно часто забывают про требование а). Приведем пример такого ошибочного рассуждения. Докажем, например, что все числа равны. Предположим, что все числа до k равны, т. е. в том числе $k - 1 = k$. Прибавив по единице к правой и левой частям равенства получим

$$k = k + 1.$$

Индукцию, однако, применять здесь было нельзя, так как не выполнено требование а).

в) Аксиомы, теоремы, следствия

1. Определения. Построение каждой математической теории начинается с перечисления основных (начальных) элементов, понятий и операций, с указания их свойств и соотношений, которые заранее предполагаются выполненными. Эти свойства и соотношения называются *аксиомами*.

Точка, прямая, плоскость, пространство — основные элементы в геометрии; натуральное число, множество, сумма и др. — в алгебре и математическом анализе. Примеры аксиом: „Через две точки можно провести одну и только одну прямую", „Если A равно B, то B равно A", „Через точку вне прямой можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной". Последняя аксиома носит название „пятого постулата Евклида". Около двух тысяч лет математики безуспешно пытались вывести ее из остальных аксиом геометрии. Лишь в середине прошлого века великий русский ученый Н. И. Лобачевский нашел правильный путь к решению загадки „пятого постулата". Он принял противоположную аксиому: „Через точку вне прямой проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной". Исходя из этого утверждения, Лобачевский построил новую геометрию, которая оказалась не менее результативной, чем геометрия Евклида. Более того, геометрия Евклида получается из геометрии Лобачевского как ее предельный случай, т. е. новая геометрия оказалась более общей.

Используя начальные элементы, понятия и операции, при помощи определений мы конструируем новые. Этот процесс продолжается далее, причем на каждом этапе используется все, что к этому моменту уже построено.

Примеры определений:

„Действие, обратное умножению, называется *делением* (*отношением*)". „Отношение двух натуральных чисел называется *дробью*".

„Часть плоскости, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки, называется *углом*".

Законы логики позволяют из аксиом получать новые и новые утверждения — *теоремы* (*следствия*).

Вспомогательные теоремы иногда называют *леммами*.

Примеры можно найти в любом учебнике по математике.

2. Прямая и обратная теоремы. Необходимость и достаточность.

Любая теорема может быть записана в стандартной форме: „Если ..., то ...".

Утверждение, обозначенное многоточием после слова „если", мы назовем A, а обозначенное вторым многоточием — B. Итак, „Если A ..., то B ...".

A — *условие теоремы*,

B — *заключение*.

Сама теорема может быть записана и так:

„Из A следует B";

„A влечет B".

„Если число делится на четыре, то оно четно".

„Из делимости числа на четыре следует его четность".

„Делимость числа на четыре влечет его четность".

„Если прямые параллельны, то накрестлежащие углы равны".

„Из параллельности прямых следует равенство накрестлежащих углов".

„Параллельность прямых влечет равенство накрестлежащих углов".

Убедившись в выполнении A мы можем утверждать, что имеет место и B. Условие (признак) A называется *достаточным* для выполнения B.

Делимость числа на четыре достаточна для его четности. Параллельность прямых достаточна для равенства накрестлежащих углов.

Если условие A не выполнено, то относительно B мы ничего сказать не можем.

Если число не делится на четыре, то оно может быть как четным, так и нечетным (10, 14, 22, но 11, 21, 33). Если прямые непараллельны, то накрестлежащие углы не равны.

Если условие B не выполнено, то условие A не имеет места. В самом деле, если бы условие A соблюдалось, то из A следовало бы B, что невозможно. Условие B называется *необходимым* для выполнения A.

Предположим теперь, что условие B выполнено. Что можно сказать об условии A?

Оказывается, что тогда условие A может как выполняться, так и не выполняться. Когда нам удается также доказать теорему: „Если B, то A“ (эта теорема называется *обратной* по отношению к рассмотренной вначале), то говорят, что A *эквивалентно* B.

„Если число четное, то оно может быть или кратным четырем, или нет“.

„Если накрестлежащие углы равны, то соответствующие прямые параллельны“. Это самостоятельная теорема, *обратная* приведенной ранее. Принимая во внимание обе эти теоремы (прямую и обратную), заключаем, что условие параллельности прямых и условие равенства накрестлежащих углов эквивалентны.

Если число нечетное, то оно не делится на четыре.

Если накрестлежащие углы не равны, то прямые непараллельны.

Для того чтобы число делилось на четыре, необходима его четность.

Для параллельности прямых необходимо равенство накрестлежащих углов.

III. ГЕОМЕТРИЯ

A. Плоские фигуры

а) Углы

1. Определения.

Отрезок — часть прямой, ограниченная двумя точками.

Луч (*полупрямая*) — часть прямой, ограниченная одной точкой.

Ломаная — последовательность отрезков, расположенных так, что конец предыдущего служит началом последующего.

Угол — часть плоскости, ограниченная двумя лучами.

2. Градусная мера углов.

Градус (°) — 1/360 часть полного оборота.

Минута (′) — 1/60 часть градуса.

Секунда (″) — 1/3600 часть градуса, 1/60 часть минуты.

Полный оборот составляет 360°.

Запись: 57°17′45″ означает 57 градусов 17 минут 45 секунд.

3. Радианная мера углов.

Радиан — угол, дуга которого равна радиусу.

В полном обороте 2π радианов.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{130} \text{ радианов} \approx 0{,}017453 \text{ радианов}.$$

$1' = \frac{\pi}{1080}$ радианов $= 0{,}000\,2909$ радианов.

$1'' = \frac{\pi}{6480}$ радианов $= 0{,}00000485$ радианов.

Переход от градусного измерения к радианному осуществляется по формуле

$$\varphi_{\text{радиан}} = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ}.$$

(См. табл. 25.)

4. Классификация углов.

Прямой — угол в $^1/_4$ полного оборота $= d = 90^\circ$. Прямые, образующие прямой угол, называются *перпендикулярными*.

Развернутый — угол в $^1/_2$ полного оборота $= 2d = 180^\circ$, его стороны образуют одну прямую.

Полный — угол в $360^\circ = 4d$.

Острый — угол, меньший прямого.

Тупой — угол, больший прямого, но меньший развернутого.

Смежные — углы, имеющие общую сторону и образующие в сумме развернутый угол.

Вертикальные — равные углы, образованные двумя пересекающимися прямыми.

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам. Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение одна другой. Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

5. Углы при параллельных прямых.

Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. При пересечении двух параллельных прямых третьей

прямой образуется восемь углов. Углы 1 и 5; 2 и 6; 3 и 7; 4 и 8 называются *соответственными* (рис. 18). Каждые два соответственных угла равны. Углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренние накрестлежащие*; 1 и 7; 2 и 8 — *внешние накрестлежащие*. Каждые два накрестлежащих угла равны.

Углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренние односторонние*, 1 и 8; 2 и 7 — *внешние односторонние*. Каждая пара односторонних углов равна в сумме 180°.

Углы с соответственно параллельными или соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо составляют в сумме 180°.

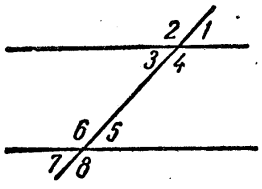


Рис. 18

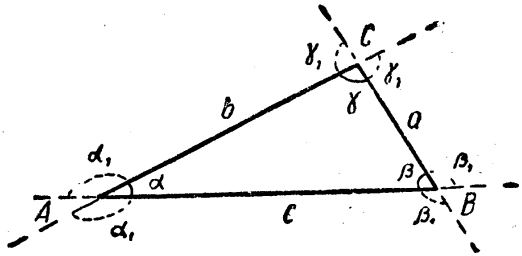


Рис. 19

б) Треугольник

1. Обозначения, основные свойства (рис. 19). Обозначения: A, B, C — вершины треугольника, a, b, c — стороны, α, β, γ — внутренние углы, α_1, β_1, γ_1 — внешние углы, $a+b+c=2p$ периметр (p — полупериметр), S — площадь треугольника.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ=2d=\pi;$$

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360^\circ=4d=2\pi;$$

$$\alpha_1=\beta+\gamma;\ \beta_1=\alpha+\gamma;\ \gamma_1=\alpha+\beta;$$

$$a+b>c,\qquad |a-b|<c,$$

$$b+c>a,\qquad |b-c|<a,$$

$$a+c>b,\qquad |a-c|<b.$$

Треугольник называется *остроугольным*, если все углы его острые, т. е. меньше 90°; *прямоугольным*, если один угол прямой; *тупоугольным*, если один угол тупой. В треугольнике может быть только один прямой или тупой угол.

2. Высота, медиана, биссектриса

Высота (h_a, h_b, h_c) — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону или на ее продолжение (рис. 20):

$$h_a = \frac{2S}{a};\quad h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab.$$

Медиана (m_a, m_b, m_c) — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны (рис. 21).

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2};$$

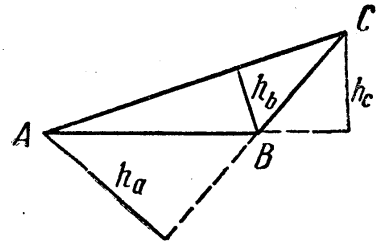


Рис. 20

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Биссектриса (w_α, w_β, w_γ) — отрезок биссектрисы соответствующего угла, лежащий внутри треугольника

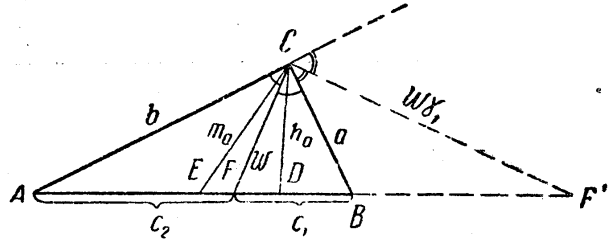


Рис. 21

(рис. 21). Биссектриса угла γ делит сторону c на отрезки c_1 и c_2, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b}{a}.$$

$$w_\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)} =$$

$$= \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)};$$

$$w_\beta = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)} =$$

$$= \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)};$$

$$w_\gamma = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)} =$$

$$= \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

Биссектриса внешнего угла (w_{α_1}, w_{β_1}, w_{γ_1}) — отрезок биссектрисы соответствующего угла между вершиной и продолжением противоположной стороны треугольника.

$$w_{\alpha_1} = \frac{1}{b-c}\sqrt{bc(a+b-c)(a-b+c)};$$

$$w_{\beta_1} = \frac{1}{c-a}\sqrt{ac(-a+b+c)(a+b-c)};$$

$$w_{\gamma_1} = \frac{1}{a-b}\sqrt{ab(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

В каждом треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой. Все биссектрисы и все медианы всегда проходят внутри треугольника. Две высоты тупоугольного треугольника проходят вне его (рис. 20).

3. Вписанная и вневписанная окружности (рис. 22). Биссектрисы углов α, β, γ пересекаются в одной точке O — центре *вписанной* (т. е. касающейся всех сторон треугольника) окружности; r — ее радиус.

Биссектрисы внешних углов треугольника пересекаются в точках O_a, O_b, O_c — центрах вневписанных окружностей. Через эти же точки проходят продолжения

соответствующих биссектрис внутренних углов; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей.

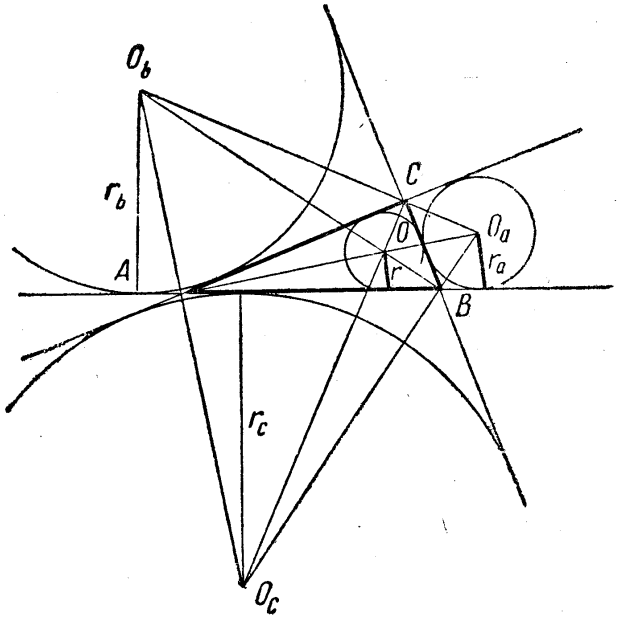


Рис. 22

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{2S}{b+c-a};\quad r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{2S}{a+c-b};$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{2S}{a+b-c};$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a};$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b};\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c};$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

4. Описанная окружность (рис. 23). Перпендикуляры, восставленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке O — центре *описанной* окружности; R — ее радиус.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

5. Центр тяжести, ортоцентр. Три медианы пересекаются в одной точке P (рис. 24), являющейся *центром тяжести* треугольника. Точка P делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (больший отрезок прилегает к вершине).

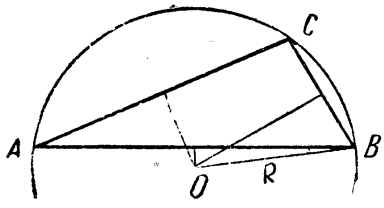


Рис. 23

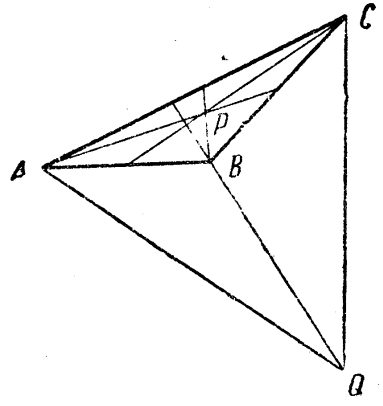


Рис. 24

Три высоты пересекаются в точке Q, называемой *ортоцентром* (рис. 24).

6. Площадь треугольника.

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad (\textit{формула Герона})$$

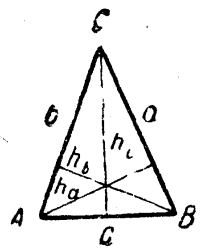
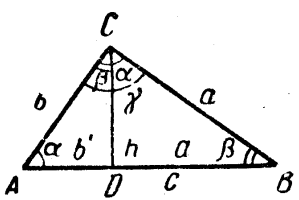
$$S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = rp = \frac{1}{2} r(a+b+c);$$

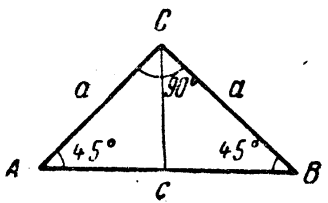
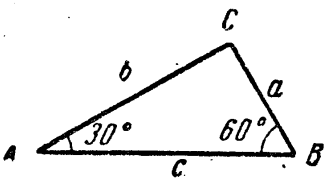
$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c);$$

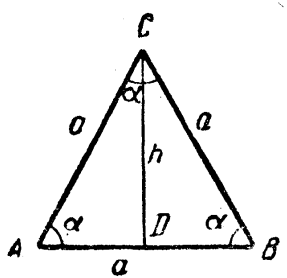
$$S^2 = r r_a r_b r_c.$$

7. Частные случаи треугольников

Треугольники	Определения, обозначения	Свойства и соотношения
Равнобедренный 	$a = b$ a, b — боковые стороны; c — основание	$\alpha = \beta$ (углы при основании равны); $h_c = m_c = w_\gamma$ (высота, медиана и биссектриса, пересекающие основание, совпадают) $h_a = h_b = \frac{2S}{a}$; $h_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$; $S = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$; $R = \frac{a^2}{2h_c}$; $r = \frac{c\,(2a - c)}{4h_c}$; $r_c = \frac{c\,(2a + c)}{4h_c}$
Прямоугольный 	$\gamma = 90°$ a, b — катеты c — гипотенуза h — высота a' — проекция a на c b' — проекция b на c	$a^2 + b^2 = c^2$ (*теорема Пифагора*); $\alpha + \beta = 90°$ Треугольники ADC, DBC и ABC подобны (у них равны два угла при гипотенузе) $a^2 = ca'$, $b^2 = cb'$, $h^2 = a'b'$, $S = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$. Центр тяжести отстоит от сторон a, b и c на расстояния $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}a$ и $\frac{1}{3}h$ соответственно.

Продолжение

Треугольники	Определение, обозначения	Свойства и соотношения
Равнобедренный прямоугольный 	$a = b$ $\gamma = 90°$	$a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $h = \frac{c}{2}$; $S = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ $\alpha = \beta = 45°$
Прямоугольный с углом в 30° 	$\gamma = 90°$ $\alpha = 30°$	$\beta = 60°$; $a = \frac{c}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ $S = \frac{\sqrt{3}}{8} c^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{6}$

Равносторонний 	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 60°;\ h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

в) Четырехугольник

1. Обозначения, основные свойства (рис. 25). Обозначения: a, b, c, d — стороны; α, β, γ, δ — внутренние углы; α_1, β_1, γ_1, δ_1 — внешние углы; $a + b + c + d = 2p$ (p — полупериметр); φ — угол между диагоналями; S — площадь; ψ — полусумма противоположных углов; p — полупериметр; P — центр тяжести.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°;$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360°.$$

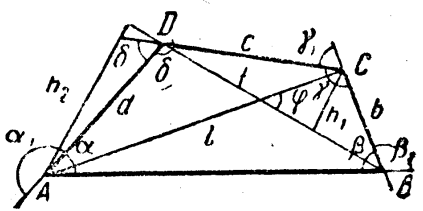


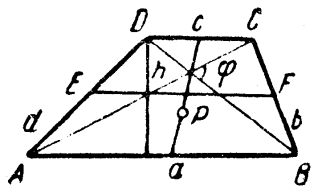
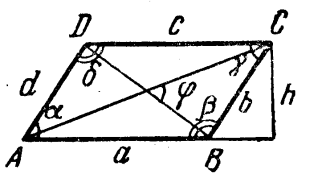
Рис. 25

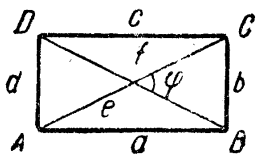
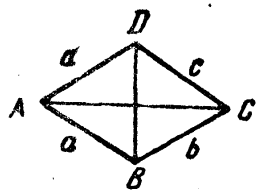
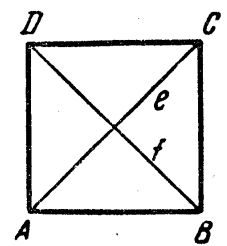
Диагональ (l, f) — отрезок прямой, соединяющий противоположные вершины.

h_1, h_2 — высоты, опущенные на одну диагональ.

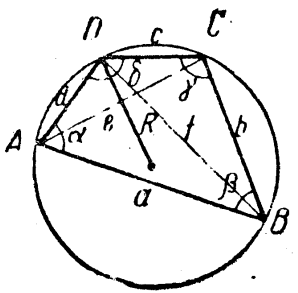
$$S = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) f = \frac{1}{2} lf \sin\varphi = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\varphi}.$$

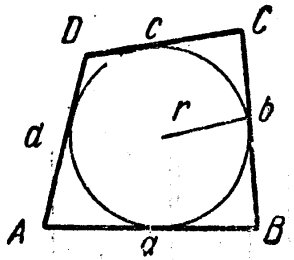
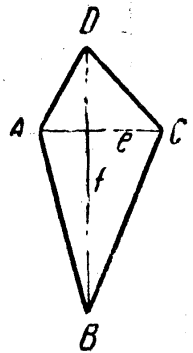
2. Частные случаи четырехугольников.

Фигура	Определение	Свойства и соотношения
Трапеция  	$c \parallel a$ c, a — основания, b, d — боковые стороны	*Средняя линия* m (отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = \frac{a+c}{2}$, $S = mh = \frac{a+b}{2} h = \frac{1}{2} lf \sin\varphi$. Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем середины оснований на расстоянии $\frac{h}{3} \frac{a+2c}{a+c}$ от нижнего основания
Равнобочная трапеция	$c \parallel a$ $b = d$	
Параллелограмм  	$a \parallel c$, $b \parallel d$	$a = c$, $b = d$; $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$. Диагонали, пересекаясь, делятся пополам; точка пересечения диагоналей — центр тяжести. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2 = l^2 + f^2$ (сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей). $S = ab \sin\alpha = ah = \frac{1}{2} lf \sin\varphi$

Прямоугольник  	$a \parallel c$, $b \parallel d$ $\alpha = 90°$	$a = c$, $b = d$ $\quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$ $l = f$ (диагонали равны). $S = ab = \frac{1}{2} l^2 \sin \varphi$
Ромб  	$a \parallel c$, $b \parallel d$, $a = b$	$a = b = c = d$ (все стороны равны). $\varphi = 90°$ (диагонали пересекаются под прямым углом). $S = \frac{1}{2} lf = a^2 \sin \alpha$
Квадрат  	$a \parallel c$, $b \parallel d$ $a = b$, $\alpha = 90°$	Все стороны равны и все углы прямые. $l = f = a\sqrt{2}$, $S = a^2 = \frac{1}{2} l^2$

Продолжение

Фигура	Определение	Свойства и соотношения
Вписанный четырехугольник 	$\alpha + \gamma = 180^\circ$ $\beta + \delta = 180^\circ$	$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. $ac + bd = lf$ (*теорема Птолемея*). R — радиус описанной окружности: $R = \frac{1}{4S}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$; $l = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$

Описанный четырехугольник 	$a + c = b + d$	$S = rp$
Четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями 	$l \perp f$	$S = \frac{lf}{2}$

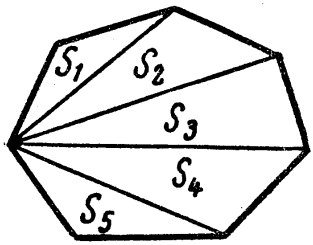
г) Многоугольник

1. Основные свойства. Сумма внутренних углов $= 180°(n-2)$. Сумма внешних углов $= 360°$.

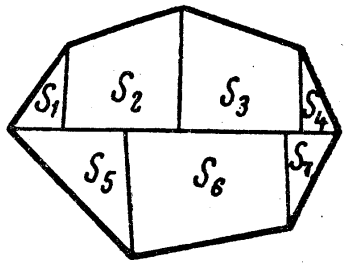
Диагональ — отрезок, соединяющий две вершины и лежащий *внутри* n-угольника.

Число диагоналей n-угольника $= \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Площадь n-угольника вычисляется как сумма площадей треугольников или трапеций, на которые он разбивается (рис. 26):



$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$



а) б)

Рис. 26

2. Правильные многоугольники. *Правильным* называется многоугольник, все стороны и углы которого равны.

Обозначения: c_n — сторона правильного n-угольника, c_{2n} — сторона правильного $2n$-угольника, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности (апофема), α — внутренний угол, α_1 — внешний угол, S_n — площадь, d — диагональ, h — высота.

Все диагонали пересекаются в одной точке, которая одновременно является центром вписанной и описанной окружности и центром тяжести n-угольника.

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180°; \quad \alpha_1 = \frac{360°}{n};$$

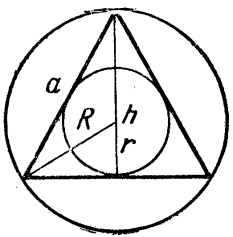
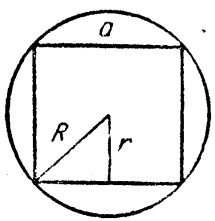
$$r_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c_n^2};$$

$$c_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - c_n^2}};$$

$$c_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2Rr_n};$$

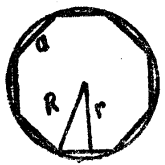
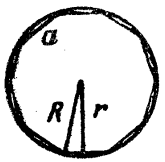
$$S_n = \frac{nc_n r_n}{2} = \frac{nc_n\sqrt{4R^2 - c_n^2}}{4}.$$

3. Соотношения в правильных многоугольниках

Правильный многоугольник	Сторона и высота	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности (апофема)	Площадь
Треугольник 	$c_3 = R\sqrt{3}$ $h = \frac{c_3}{2}\sqrt{3} =$ $= \frac{3R}{2} = 3r$	$R = \frac{c_3\sqrt{3}}{3} =$ $= \frac{2}{3}h = 2r$	$r = \frac{R}{2} =$ $= \frac{c_3\sqrt{3}}{6} = \frac{h}{3}$	$S = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} =$ $= \frac{c_3^2}{4}\sqrt{3} =$ $= \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3}$
Квадрат 	$c_4 = R\sqrt{2}$	$R = \frac{c_4}{2}\sqrt{2} = r\sqrt{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{c_4}{2}$	$S = 2R^2 = c_4^2 = 4r^2$

Продолжение

Правильный многоугольник	Сторона и высота	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности (апофема)	Площадь
Пятиугольник	$c_5 = \frac{R}{2} \times$ $\times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ $= 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$R =$ $= \frac{c_5}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} =$ $= r(\sqrt{5}-1)$	$r = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1) =$ $= \frac{c_5}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$S =$ $= \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$ $= \frac{c_5^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} =$ $= 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
Шестиугольник	$c_6 = R =$ $= \frac{2}{3}r\sqrt{3}$	$R = c_6$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2} =$ $= \frac{c_6\sqrt{3}}{2}$	$S = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} =$ $= \frac{3}{2}c_6^2\sqrt{3} =$ $= 2r^2\sqrt{3}$

Восьмиугольник 	$c_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1)$	$R = \frac{c_8}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} = r\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{c_8}{2}(\sqrt{2}+1)$	$S = 2R^2\sqrt{2} = 2c_8^2(\sqrt{2}+1) = 8r^2(\sqrt{2}-1)$
Десятиугольник 	$c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{2r}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$R = \frac{c_{10}}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{r}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$	$r = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{c_{10}}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$S = \frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}c_{10}^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

1. Элементы круга

Круг — часть плоскости, ограниченная кривой, все точки которой равноудалены от некоторой точки O.

Центр — точка O (см. *круг*).

Окружность — граница круга.

Радиус — отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности (обозначается r, R).

Секущая — прямая, проходящая через две точки M и N окружности.

Хорда — отрезок MN, соединяющий две точки M и N окружности.

Диаметр — хорда, проходящая через центр (обозначается d, D). Диаметр равен двум радиусам ($D=2R$).

*Касательная** — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. (Построение см. стр. 152.)

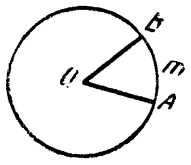
Сегмент — часть круга, отсекаемая хордой.

Стрелка дуги, *Высота сегмента* — отрезок перпендикуляра к середине хорды до пересечения с окружностью.

Сектор — часть круга, вырезаемая двумя радиусами.

Кольцо — часть плоскости между двумя концентрическими окружностями.

2. Углы и окружность

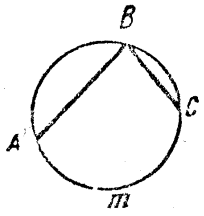


Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

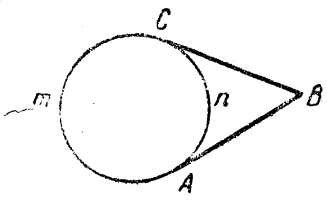
---

* Определение касательной к произвольной кривой см. на стр. 249.



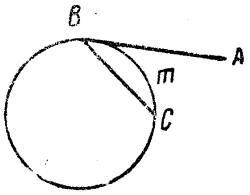
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$



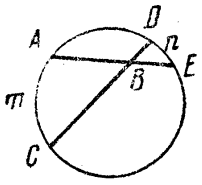
Описанный угол (угол между двумя касательными) равен полуразности образованных им дуг:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC).$$



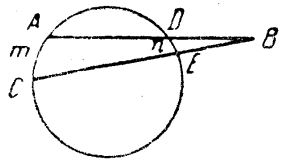
Угол между хордой и касательной равен половине дуги, заключенной внутри него:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$



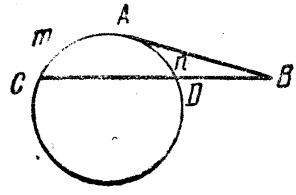
Угол между двумя хордами AE и CD равен полусумме дуг, на которые он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup EnD).$$



Угол между секущими измеряется полуразностью высекаемых им дуг:

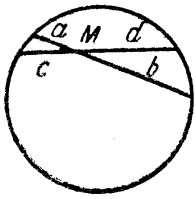
$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup DnE).$$



Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых дуг, прилежащих к касательной:

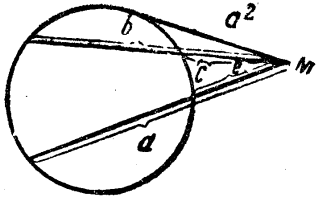
$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnD).$$

3. Пропорциональные отрезки



M — точка внутри круга, через которую проведены две хорды

$$ab = cd.$$



M — точка вне круга, из которой проведены касательная и две секущих

$$a^2 = bc = de.$$

4. Соотношения

Отношение длины окружности C к ее диаметру D есть величина постоянная, равная 3,14159... Это число иррациональное, оно обозначается греческой буквой π.

$$C = 2\pi R = \pi D.$$

Длина дуги в φ градусов $C = \dfrac{\pi R \varphi}{180^\circ}$.

Длина дуги в φ радиан $C = R\varphi$.

Длина хорды $l = 2\sqrt{hR - h^2}$ (h — стрелка).

Высота сегмента $h = R - \sqrt{R^2 - \dfrac{l^2}{4}}$.

Площадь круга $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi}{4} D^2 = \dfrac{RC}{2}$.

Площадь сектора $S = \dfrac{RC}{2} = \dfrac{\pi R^2 \varphi}{360^\circ}$ (φ в градусах).

Площадь кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$

(r и d относятся к меньшей окружности).

Площадь кольцевого сектора $S = \pi \dfrac{\varphi (R^2 - r^2)}{360^\circ}$

(φ в градусах).

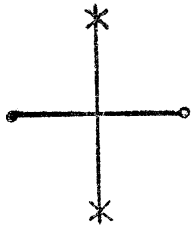
Площадь сегмента $S = \dfrac{R(l - a) + ah}{2}$

(b — дуга, a — хорда, h — стрелка).

Б. Задачи на построение

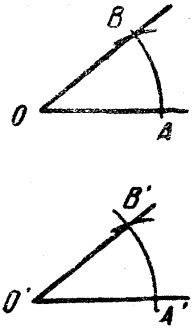
а) Элементарные построения

1. Перпендикуляр к отрезку в его середине.



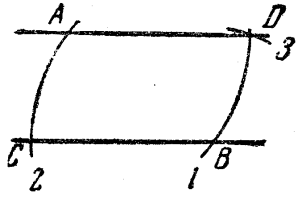
Одинаковым раствором циркуля проводим дуги с центрами в концах отрезка. Прямая, проходящая через точки пересечения засечек, — искомый перпендикуляр.

2. Угол, равный данному. На луче $O'A'$ построить угол, равный данному углу AOB.



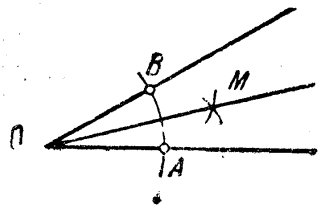
Данный угол AOB измеряем дугой AB произвольного радиуса R и расстоянием a между точками A и B. Далее проводим дугу радиуса R с центром в вершине O' данного луча $O'A'$, а из точки A' раствором циркуля радиуса a делаем засечку на дуге. Угол $A'O'B'$ искомый.

3. Прямая, параллельная данной. Через точку A провести прямую, параллельную данной прямой.



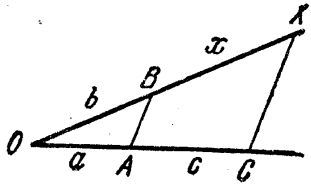
Описываем дугу произвольным радиусом с центром в точке A. Тем же радиусом описываем дугу с центром в точке B. На первой дуге из точки B раствором циркуля радиуса AC делаем засечку и получаем точку D. Прямые AD и BC параллельны.

4. Биссектриса угла. Разделить данный угол пополам.



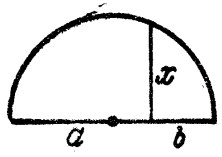
Из точки O произвольным радиусом проводим дугу AB. Из точек A и B достаточно большим радиусом (например, AB) делаем засечки. Точка M пересечения засечек лежит на биссектрисе.

5. Четвертый пропорциональный отрезок. По данным отрезкам a, b, c построить отрезок x такой, что $a:b=c:x$.



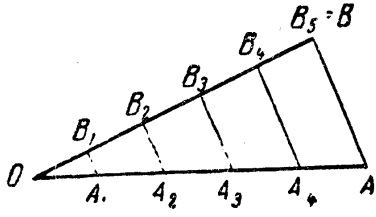
На одной стороне произвольного угла откладываем отрезки a и c, а на другой отрезок b. Через точку C проводим прямую, параллельную AB (см. задачу 3). Отрезок $BX=x$ — искомый.

6. Средний пропорциональный отрезок. По двум отрезкам a и b построить отрезок x такой, что $a:x=x:b$.



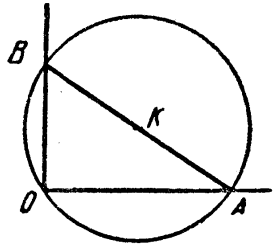
На отрезке, равном сумме a и b, как на диаметре, строим окружность. (Для этого делим отрезок пополам, используя задачу 1.) Перпендикуляр x будет искомым отрезком.

7. Деление отрезка на равные части.



Под некоторым углом к данному отрезку проводим луч и откладываем на нем столько равных отрезков OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., на сколько частей нужно разделить OA. Соединяем последнюю точку B с точкой A. Через B_1, B_2, B_3, ... проводим прямые, параллельные AB (см. задачу 3). A_1, A_2, A_3, ... — искомые точки деления.

8. Перпендикуляр в конце луча. К данному лучу OA, не продолжая его, восставить перпендикуляр в точке O.



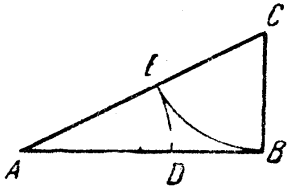
Возьмем вне луча какую-либо точку K так, чтобы окружность с центром в точке K и радиусом OK, пересекала луч OA в некоторой точке A. Через точку A проведем диаметр AB. Точка B лежит на искомом перпендикуляре.

9. Золотое сечение. Разделить отрезок $AB = a$ в среднем и крайнем отношении:

$a : x = x : (a - x)$;

отсюда

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$



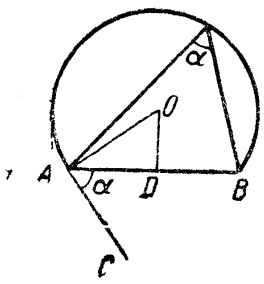
Строим отрезок CB, перпендикулярный к AB и равный $\frac{a}{2}$.

$$CE = \frac{a}{2}; \quad AD = AE = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

— искомая величина.

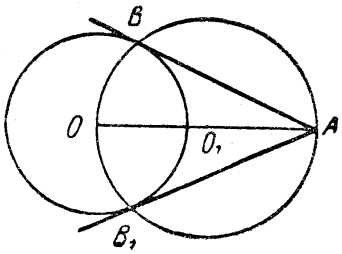
10. Сегмент, вмещающий данный угол. На данном отрезке построить сегмент, все вписанные углы которого, опирающиеся на AB, равны α.

При конце отрезка AB строим, как при вершине, угол BAC, равный α. Центр O искомого сегмента — пересечение перпендикуляра OD к середине отрезка AB и перпендикуляра OA к стороне AC угла BAC (см. задачу 8).

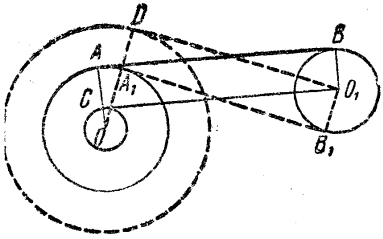


11. Касательная к окружности. Через точку A вне окружности провести касательную к ней.

На отрезке OA, как на диаметре, строим окружность с центром в точке O_1. Точки B и B_1 лежат на касательных.



12. Общая касательная к двум окружностям.

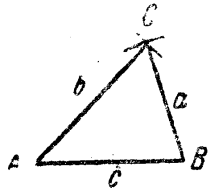


Можно построить две внешних касательных (обе окружности лежат по одну сторону) и две внутренних (окружности лежат по разные стороны — на рисунке показаны пунктиром).

Строим окружность с центром в точке O и радиусом, равным разности (для внутренней касательной — сумме) радиусов данных окружностей. К построенной окружности проводим касательную, O_1C (соответственно O_1D). Две другие касательные AB и A_1B_1 параллельны O_1C и O_1D.

б) Построение треугольника

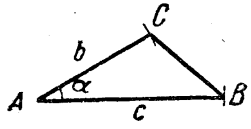
1. По трем сторонам.



Из концов отрезка AB, равного одной из сторон треугольника, делаем засечки радиусами, равными двум другим сторонам.

Задача имеет решение, если данные отрезки удовлетворяют неравенству треугольника (стр. 130).

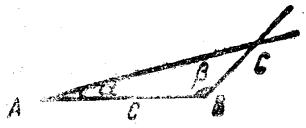
2. По двум сторонам и углу между ними.



Построив угол BAC, равный данному, откладываем на его сторонах два данных отрезка.

Задача имеет решение всегда.

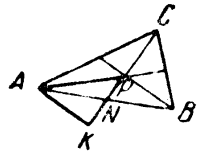
3. По стороне и прилежащим к ней углам.



При каждом из концов отрезка AB, равного данной стороне, строим по одному данному углу.

Задача имеет решения, если один из углов острый.

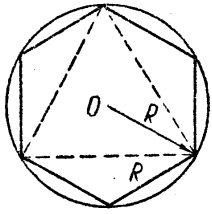
4. По трем медианам.



Если медиану CN продолжить на отрезок NK, равный PN, то получим треугольник APK, каждая из сторон которого равна $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы. Задача сводится к задаче 1.

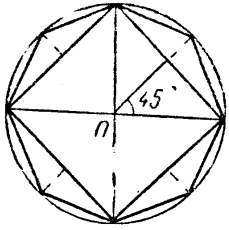
в) Построение правильных многоугольников

1. Треугольник и шестиугольник.



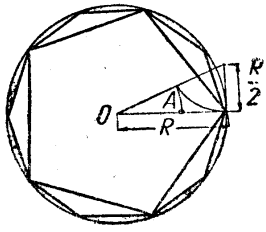
Делая на окружности последовательные засечки радиусом R, получим шесть вершин правильного шестиугольника. Соединяя вершины через одну, построим правильный треугольник.

2. Квадрат и восьмиугольник.



Два взаимно перпендикулярных диаметра пересекают окружность в вершинах квадрата. Повернув диаметры на 45° (или разделив углы между ними пополам), получим 8 точек, являющихся вершинами правильного восьмиугольника.

3. Пятиугольник и десятиугольник.



Разделив радиус в среднем и крайнем отношении (см. стр. 151), получим отрезок OA, равный стороне правильного вписанного десятиугольника. Соединяя вершины десятиугольника через одну, построим правильный пятиугольник.

В. Геометрические преобразования

При решении геометрических задач используются геометрические преобразования: параллельный перенос, симметрия, подобие.

1. Параллельный перенос. На плоскости задано направление NN'. Говорят, что фигура F' получается из фигуры F *параллельным переносом* в направлении NN' на расстояние a (рис. 27), если каждая точка A' фигуры F' отстоит от соответствующей точки A фигуры F на расстояние a и прямая $AA' \parallel NN'$.

Два последовательных параллельных переноса дают „в сумме" новый параллельный перенос.

Параллельный перенос переводит прямую l в параллельную ей прямую l', а окружность — в равную ей окружность.

Пример 1. Два завода A и B разделены рекой ширины d, берега которой параллельны. В каком месте следует построить мост, перпендикулярный к берегам реки, чтобы путь из A в B был кратчайшим?

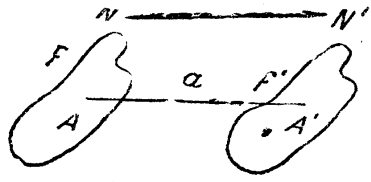


Рис. 27

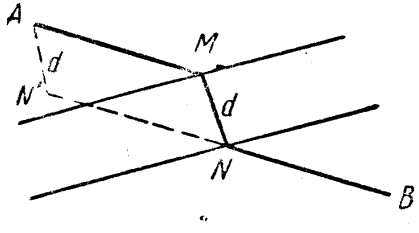


Рис. 28

Решение. Если путь $AMNB$ кратчайший, то перенеся отрезок MN параллельно самому себе вдоль AM (рис. 28), видим, что путь $AN'NB$ имеет ту же длину. Отсюда простое построение: откладываем отрезок AN', перпендикулярный к берегам реки и равный d; точка N пересечения отрезка $N'B$ с дальним от N' берегом реки — конец искомого моста. Проведя $AM \parallel NB$, найдем точку M (второй конец моста).

Пример 2. Построить трапецию по основаниям a и c $(a > c)$ и боковым сторонам b и d.

Р е ш е н и е. Предположим, что трапеция $ABCD$ со сторонами a, b, c, d построена (рис. 29). Перенесем сторону AD трапеции параллельно самой себе в положение $A'C$ и получим треугольник $A'BC$ с тремя известными сторонами b, d, $a-c$.

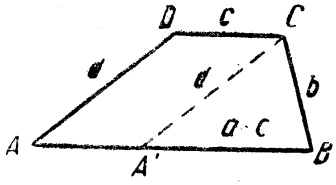


Рис. 29

П о с т р о е н и е: строим треугольник $A'BC$ по трем сторонам $a-c$, b, d (см. стр. 153). На продолжении стороны $A'B$ откладываем отрезок AA' длины c. Из точек A и C проводим прямые, параллельные соответственно $A'C$ и AB, точка пересечения которых — вершина D.

Задача имеет решение, если отрезки d, b и $a-c$ удовлетворяют неравенствам треугольника (см. стр. 130).

2. Осевая симметрия. Точка A' называется *симметричной* точке A относительно прямой l (оси симметрии), если отрезок AA' перпендикулярен к прямой l и делится ею пополам.

Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры F относительно прямой l, образует фигуру F', *симметричную фигуре F относительно l* (рис. 30).

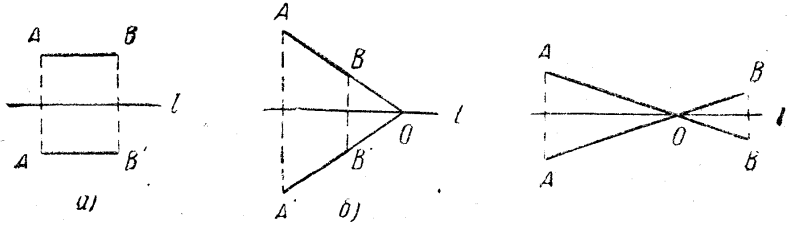


Рис. 30

Свойство симметрии фигур взаимно.

Все точки фигуры F, лежащие на оси симметрии, при преобразовании симметрии остаются неподвижными.

Отрезки AB и $A'B'$ на рис. 30 симметричны друг другу.

П р и м е р. Луч света, выйдя из точки M, отразился от зеркала и попал в точку N. Построить путь луча.

Р е ш е н и е. Проделаем следующее построение. Найдем точку N', симметричную точке N относительно оси l (рис. 31). Соединим отрезками точку N' с точкой M, а точку P с точкой N. Путь MPN будет кратчайшим, так как $PN = PN'$.

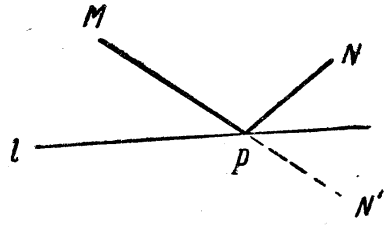


Рис. 31

3. Подобие. Центральная симметрия. Точка A' называется *центрально-подобной* (или *гомотетичной*) точке A относительно *центра подобия* O с *коэффициентом подобия* k, если A' лежит на прямой OA и $\frac{OA'}{OA} = k$ (рис. 32). Если точки A и A' лежат по одну сторону от центра подобия O, то числу k приписываем знак $+$, если по разные стороны, то знак $-$.

Совокупность всех точек, центрально-подобных точкам некоторой фигуры F, образует фигуру F' (рис. 32), *центрально-подобную* F (относительно центра подобия O с коэффициентом подобия k).

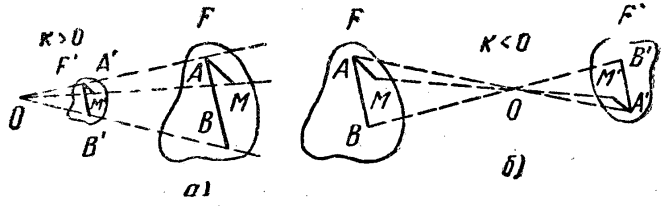


Рис. 32

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *центрально-подобным преобразованием* или *гомотетией*.

С в о й с т в а г о м о т е т и и.

1. Если F гомотетично F' относительно центра O с коэффициентом k, то F' гомотетично F относительно того же центра с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

2. Гомотетия переводит прямую AB в прямую $A'B'$, ей параллельную (рис. 32).

3. Гомотетия сохраняет все углы.

4. Гомотетия сохраняет отношение любых отрезков и площадей.

Преобразование подобия с коэффициентом подобия „-1" называется *центральной симметрией*. Можно дать самостоятельное определение центральной симметрии.

Точка A' называется *симметричной* точке A $(A \neq A')$ относительно *центра симметрии* O, если отрезки OA и OA' равны и лежат на одной прямой.

Совокупность всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно центра симметрии O, образует фигуру F', симметричную фигуре F относительно O (рис. 33).

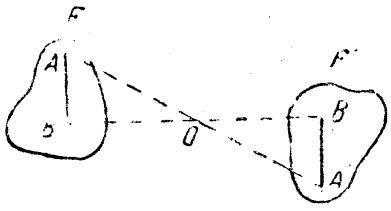


Рис. 33

Признаки подобия треугольников*. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ подобны, если выполняется одно из следующих условий:

1. Два угла одного равны двум углам другого

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

2. Стороны одного пропорциональны сторонам другого.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

3. Две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны

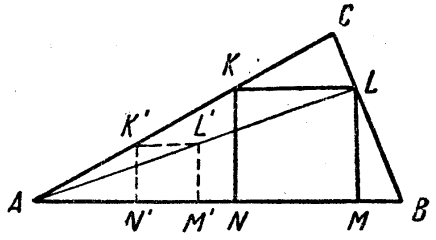
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \quad \alpha = \alpha'.$$

---

* Два треугольника F и F' называются *подобными*, если их можно расположить так, что найдутся точка O — центр подобия и число k — коэффициент подобия такие, при которых треугольники F и F' удовлетворяют определению, данному на стр. 157.

Пример. Вписать в данный треугольник ABC квадрат $KLMN$ так, чтобы сторона MN лежала на основании AB, а вершины K и L — на боковых сторонах треугольника.

Решение. Строим некоторый квадрат $K'L'M'N'$ так, чтобы K' лежала на AC, а $N'M'$ на AB (рис. 34). Искомый квадрат получае ся из данного преобразованием подобия с центром в точке A (доказать!). Поэтому вершина L лежит на пересечении прямой AL' со стороной BC. Найдя точку L, построить искомый квадрат не составляет труда.



Рис, 34

Г. Выпуклые фигуры в пространстве

1. Прямые и плоскости. Углы. Две прямые в пространстве могут а) пересекаться, б) не пересекаться, но лежать в одной плоскости (*параллельные* прямые), в) не пересекаться и не лежать в одной плоскости (*скрещивающиеся* прямые).

Угол между скрещивающимися прямыми измеряется углом между параллельными им прямыми, проходящими через общую точку.

Прямая *параллельна* плоскости, если она не имеет с ней общих точек.

Прямая *перпендикулярна* к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой этой плоскости.

Проекция (ортогональная) отрезка на плоскость — отрезок прямой, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных на эту плоскость из концов данного отрезка.

Угол между прямой и плоскостью измеряется углом между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

1. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекаю-

щимся прямым другой плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.

3. Если прямая перпендикулярна к двум прямым данной плоскости, то она перпендикулярна и к самой плоскости.

4. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна к проекции другой прямой на эту плоскость, то она перпендикулярна и к самой прямой.

5. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна к другой прямой, то она перпендикулярна и к ее проекции на данную плоскость.

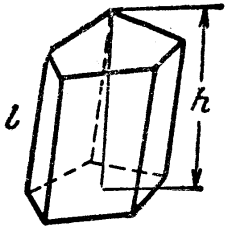
Две пересекающиеся плоскости образуют *двугранный угол*, который измеряется линейным углом между перпендикулярами к ребру MN, восставленными в обеих плоскостях из одной точки B.

Несколько плоскостей, проходящих через одну точку, образуют *многогранный угол*. Многогранные углы равны, если при наложении они совпадают.

2. Многогранники. Многогранником называется тело, ограниченное плоскостями.

Обозначения: V — объем, S_0 (S_1 и S_2) — площадь основания, $S_б$ — боковая поверхность, S — полная поверхность, h — высота, Q — площадь перпендикулярного сечения, p — периметр перпендикулярного сечения, l — ребро, d — диагональ.

Призма

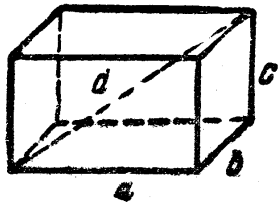


Основания — равные многоугольники, боковые грани — параллелограммы;

$$V = S_0 h, \quad S = S_б + 2S_0, \quad S_б = pl.$$

Центр тяжести — середина отрезка, соединяющего центры тяжести оснований.

Параллелепипед



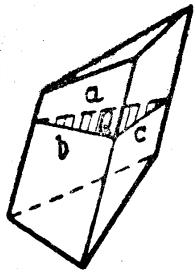
Все грани — параллелограммы. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники. Для него:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$S = 2(ab + ac + bc),$$

$$V = abc.$$

Усеченная призма

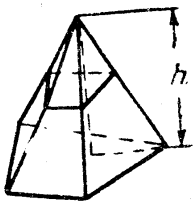


Боковые ребра параллельны,

$$V = Q \cdot \frac{a+b+c}{3}$$

(a, b, c, — боковые ребра)

Пирамида

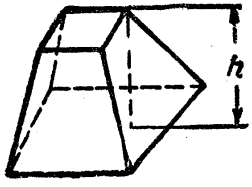


Основание—многоугольник, боковые грани — треугольники, имеющие общую вершину,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_0 h, \quad S = S_0 + S_б.$$

Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем вершину с центром тяжести основания и отстоит от основания на расстоянии $\frac{h}{4}$.

Усеченная пирамида



Основания S_1 и S_2 параллельны,

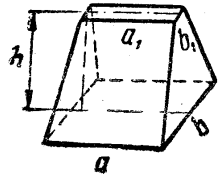
$$V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

$$S = S_1 + S_2 + S_б.$$

Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести оснований и отстоит от большего основания на расстоянии

$$\frac{h}{4} \cdot \frac{S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 3S_2}{S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_1}.$$

Обелиск



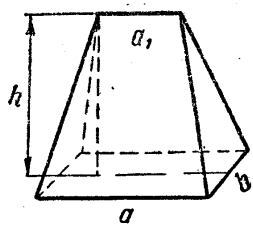
Основания параллельны, боковые грани — трапеции,

$$V = \frac{h}{6}[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1].$$

Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести оснований и отстоит от нижнего основания на расстоянии

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{ab + ab_1 + a_1 b + 3a_1 b_1}{2ab + ab_1 + a_1 b + 2a_1 b_1}.$$

Клин



Клин — обелиск, верхнее основание которого стянуто в прямую ($b_1 = 0$).

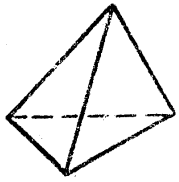
$$V = \frac{h}{6}(2a + a_1)\,b.$$

Центр тяжести отстоит от основания на расстоянии $\frac{h}{2} \cdot \frac{a + a_1}{2a + a_1}$.

3. Правильные многогранники. *Правильными* называются многогранники, у которых все грани равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Всего имеется пять правильных многогранников.

Обозначения: V — объем, S — поверхность, a — сторона, R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, h — высота, d — диагональ.

Тетраэдр



Все 4 грани — равносторонние треугольники; 4 вершины; 6 ребер;

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 0{,}1179a^3,$$

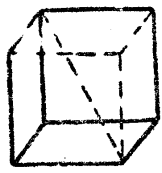
$$S = a^2\sqrt{3} = 1{,}7321a^2,$$

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6},\quad R = \frac{a}{4}\sqrt{6},$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Центр тяжести отстоит на $\frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ от основания. Угол между гранями = 70° 32′.

Куб (Гексаэдр)



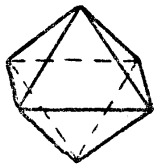
Все 6 граней — квадраты; 8 вершин; 12 ребер;

$$V = a^3,\ S = 6a^2,\ d = a\sqrt{3},$$

$$r = \frac{a}{2},\ R = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Центр тяжести — точка пересечения диагоналей. Угол между гранями = 90°.

Октаэдр



Все 8 граней — равносторонние треугольники; 6 вершин, 12 ребер,

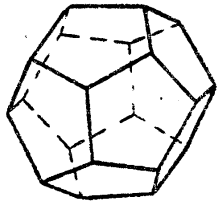
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 0{,}4714a^3,$$

$$S = 2a^2\sqrt{3} = 3{,}4641a^2,$$

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2},\quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Центр тяжести — точка пересечения диагоналей „основного" квадрата. Угол между гранями = = 109° 20′.

Додекаэдр



Все 12 граней — правильные пятиугольники, 20 вершин, 30 ребер.

$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4} = 7{,}6631a^3,$$

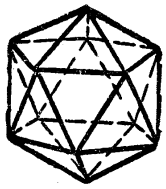
$$S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = 20{,}6457a^2,$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4},$$

$$r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}.$$

Центр тяжести — середина отрезка, соединяющего центры противоположных граней. Угол между гранями = 116° 34′.

Икосаэдр



Все 20 граней — равносторонние треугольники; 12 вершин, 30 ребер.

$$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12} = 2{,}1817a^3,$$

$$S = 5a^2\sqrt{3} = 8{,}6603a^2,$$

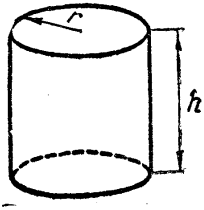
$$R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})},$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}.$$

Центр тяжести — точка пересечения диагоналей основного шестиугольника. Угол между гранями = 138°11′.

4. Цилиндр, конус

Прямой круговой цилиндр



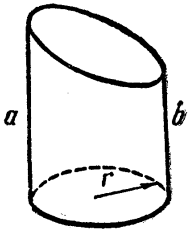
Основание — круг, образующая перпендикулярна к основанию;

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2}{4}h,\ S_б = 2\pi rh = \pi dh,$$

$$S = 2\pi r(r+h) = \pi d\left(\frac{d}{2}+h\right).$$

Центр тяжести — середина оси.

Усеченный прямой круговой цилиндр



$$V = \frac{\pi r^2}{2}(a+b) = \frac{\pi d^2}{8}(a+b),$$

$$S_б = \pi r(a+b) = \frac{\pi d}{2}(a+b),$$

$$S = \pi r\left[a+b+r+\sqrt{r^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\right].$$

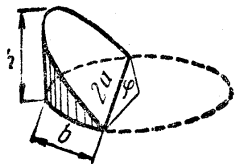
Центр тяжести лежит на оси, соединяющей центры тяжести оснований на расстоянии

$$\frac{a+b}{4} + \frac{1}{4}\frac{r^2\operatorname{tg}^2\alpha}{a+b},$$

где a — угол наклона верхнего основания к плоскости нижнего.

a и b — наибольшая и наименьшая образующие

Цилиндрическая подкова



$$V = \frac{h}{3b}\left[a\,(3r^2 - a^2) + 3r^2\,(b - r)\,\frac{\varphi\pi}{180^\circ}\right],$$

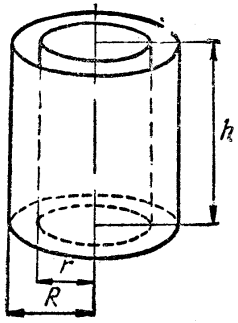
$$S_б = \frac{2rh}{b}\left[(b - r)\,\frac{\varphi\pi}{180^\circ} + a\right].$$

h — высота, r — радиус основания, $2a$ — прямое ребро, b — стрелка сегмента основания, 2φ — центральный угол основания (в градусах)

Если в основании полукруг, то

$$V = \frac{2}{3}r^2h,\quad S_б = 2rh.$$

Полый цилиндр



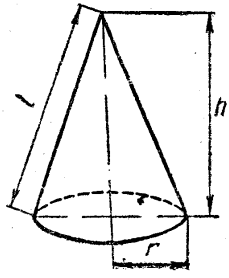
$$V = \pi h\,(R^2 - r^2) = \pi h\delta\,(2R - \delta) = \pi h\delta\,(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho,$$

$$S_б = 2\pi h\,(R + r),$$

$$S = 2\pi\,(R + r)\,(h + R - r) = 4\pi\rho\,(h + \delta).$$

R — наружный радиус, r — внутренний радиус, h — высота, $\delta = R - r$ — толщина, $\rho = \frac{R+r}{2}$ — средний радиус

Прямой круговой конус



Основание — круг, ось перпендикулярна к основанию;

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2h = \frac{\pi}{12}\,d^2h,$$

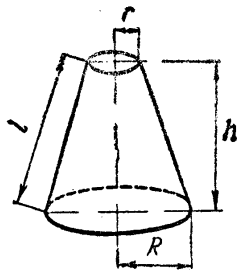
$$S_б = \pi rl,\quad l = \sqrt{r^2 + h^2},$$

$$S = \pi r\,(r + l) = \pi\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2} + l\right).$$

Центр тяжести — на расстоянии $h/4$ от основания.

l — образующая

Усеченный прямой круговой конус



$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + rR + R^2) =$$

$$= \frac{1}{12}\pi h\,(d^2 + dD + D^2),$$

$$S_б = \pi l\,(r + R) = \frac{\pi l}{2}\,(d + D),$$

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (D - d)^2},$$

$$S = \pi\,[r^2 + R^2 + l\,(r + R)] =$$

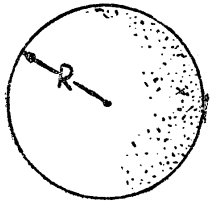
$$= \frac{\pi}{4}\,[d^2 + D^2 + 2l\,(d + D)].$$

Центр тяжести отстоит от основания на расстоянии

$$\frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2rR + 3r^2}{R^2 + rR + 2r^2}.$$

5. Шар.

Шар



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}\,D^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}};$$

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2 = \sqrt[3]{36\pi V^2};$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{4\pi}};$$

$$D = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Полый шар

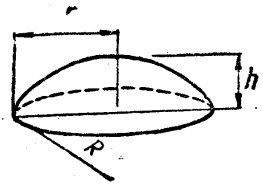
R — наружный радиус,
r — внутренний радиус,
D — наружный диаметр,
d — внутренний диаметр

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) =$$

$$= \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3);$$

$$S = 4\pi(R^2 + r^2) = \pi(D^2 + d^2).$$

Шаровой сегмент



h — высота,
r — радиус основания

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^2(3D + 2h);$$

$$S_б = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

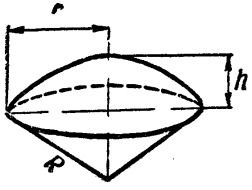
$$S = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$r^2 = \sqrt{h(2R - h)}.$$

Центр тяжести лежит на оси симметрии и отстоит от центра шара на расстоянии

$$\frac{3}{4}\,\frac{(2R - h)^2}{3R - h}.$$

Шаровой сектор



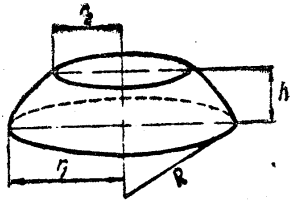
h — высота сегмента,
r — радиус основания сегмента

$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi}{6}D^2 h;$$

$$S = \pi R(2h + r).$$

Центр тяжести лежит на оси симметрии на расстоянии $\frac{3}{8}(2R - h)$ от центра шара.

Шаровой пояс



$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2);$$

$$S_б = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

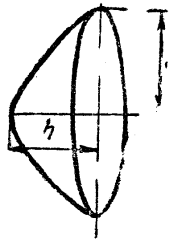
$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2) =$$

$$= \pi(Dh + r_1^2 + r_2^2).$$

h — высота пояса,
r_1 и r_2 — радиусы оснований

6. Фигуры вращения.

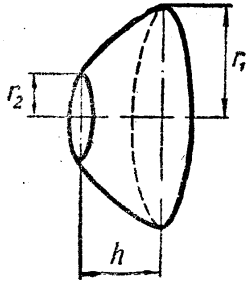
Параболоид вращения.



$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h.$$

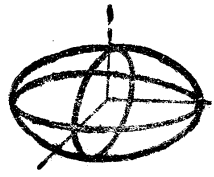
Центр тяжести лежит на оси вращения на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от вершины.

Усеченный параболоид вращения



$$V = \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h.$$

Эллипсоид

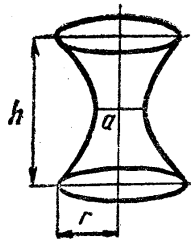


$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Для эллипсоида вращения

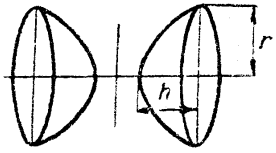
$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Гиперболоид



Однополостный

$$V = \frac{\pi h}{3}\,(2a^2 + r^2).$$

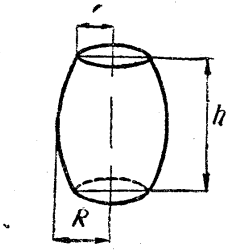


Двуполостный

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(3r^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right).$$

a, b — полуоси гиперболы

Бочка



Сферическая

$$V = \frac{1}{3}\,\pi h\,(2R^2 + r^2) =$$

$$= \frac{1}{12}\,\pi h\,(2D^2 + d^2).$$

Параболическая

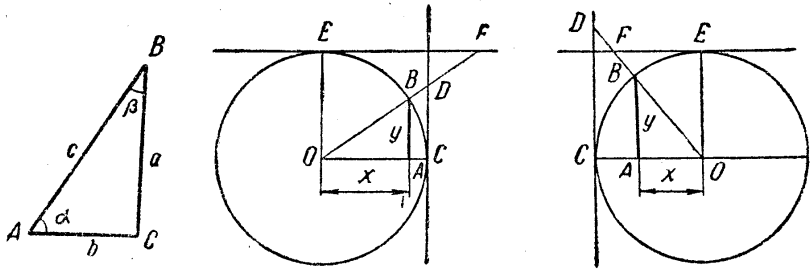
$$V = \frac{1}{15}\,\pi h\,(8R^2 + 4Rr + 3r^2) =$$

$$= \frac{1}{60}\,\pi h(8D^2 + 4dD + 3d^2).$$

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

A. Тригонометрические функции

1. Определения и свойства. Тригонометрические функции можно определить геометрически при помощи отношений отрезков в прямоугольном треугольнике (для острого угла) и в круге с радиусом единица (для остальных углов).

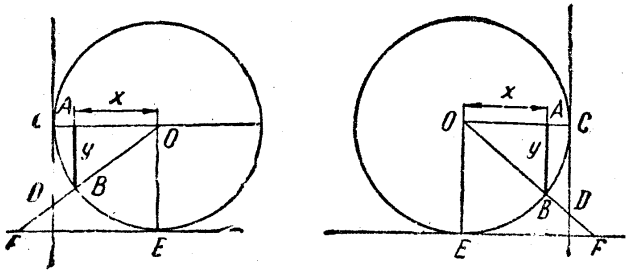


Синус: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{Противолежащий катет}}{\text{Гипотенуза}} = y = \overline{AB}.$

Косинус: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{Прилежащий катет}}{\text{Гипотенуза}} = x = \overline{OA}.$

Тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{Противолежащий катет}}{\text{Прилежащий катет}} = \overline{CD}.$

Котангенс: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{Прилежащий катет}}{\text{Противолежащий катет}} = \overline{EF}.$



Секанс: $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Гипотенуза}}{\text{Прилежащий катет}}$.

Косеканс: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Гипотенуза}}{\text{Противолежащий катет}}$.

Знаки тригонометрических функций в четырех квадрантах

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

2. Основные соотношения.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Аргумент \ Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0	0	1	0	∞
$15^\circ\ \left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ\ \left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ\ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ\ \left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ\ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ\ \left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72^\circ\ \left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$75^\circ\ \left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞	0
$120^\circ\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$180^\circ\ (\pi)$	0	-1	0	∞
$240^\circ\ \left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$270^\circ\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	∞	0

Выражение одних тригонометрических функций через другие*

Функции	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\sec\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}\alpha^2}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

* Знак перед корнем определяется из таблицы на стр. 171 в зависимости от того, в каком квадранте расположен аргумент.

Формулы приведения.

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha;\\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha;\\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha;\\ \operatorname{cosec}(-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha;\end{aligned}\right\}$$ $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — функции нечетные.

$$\left.\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha;\\ \sec(-\alpha) &= \sec\alpha\end{aligned}\right\}$$ $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ — функции четные.

Функция / Аргумент	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\operatorname{cosec}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

Периодичность.

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ имеют период 2π, а функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — период π:

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha;\quad \operatorname{cosec}(\alpha+2\pi n)=\operatorname{cosec}\alpha;$$
$$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha;\quad \operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\sec(\alpha+2\pi n)=\sec\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

3. Теоремы сложения.

Функции суммы и разности двух углов.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta:$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha+1};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Функции кратных углов.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\sin 4\alpha=\cos\alpha(4\sin\alpha-8\sin^3\alpha);$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=$$
$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}4\alpha=\frac{4\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Функции половинного угла.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}.$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от того, в каком квадранте оказывается угол $\frac{\alpha}{2}$. Например, для $\alpha = 240°$ нужно выбрать знак „+“ перед $\sin\frac{\alpha}{2}$ и знак „—“ перед $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, так как $\frac{\alpha}{2} = 120°$ лежит во втором квадранте.

Произведения тригонометрических функций.

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta);$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta);$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+$$
$$+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma);$$
$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+$$
$$+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma);$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);$$
$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(-\sin 3\alpha+3\sin\alpha);$$
$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3);$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$
$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha);$$
$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3);$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta = \cos^2\beta-\cos^2\alpha;$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta;$$
$$\sec^2\alpha\,\mathrm{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha+\mathrm{cosec}^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}.$$

Суммы и разности тригонометрических функций.

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$p\cos\alpha+q\sin\alpha=r\sin(\alpha+\theta);$$

где $r=\sqrt{p^2+q^2}$, $\sin\theta=\frac{p}{r}$, $\cos\theta=\frac{q}{r}$;

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Б. Обратные тригонометрические функции

1. Определения. Главные значения. Функции Arc sin x, Arc cos x, Arc tg x, Arc ctg x, Arc sec x, Arc cosec x, обратные соответственно функциям sin x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x, называются *обратными тригонометрическими функциями*. Графики обратных тригонометрических функций см. на стр. 239 и 240.

Arc sin x — это величина (например, дуга), синус которой равен x, Arc cos x — величина, косинус которой равен x, и т. д.

Если $\operatorname{Arc}\sin x = \alpha$, то $\sin\alpha = x$, и т. д.

$$\sin(\operatorname{Arc}\sin x) = x,$$

$$\cos(\operatorname{Arc}\cos x) = x,$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x) = x, \ldots$$

Область значений тригонометрической функции совпадает с областью определения соответствующей обратной функции: область значения $\sin x$ — отрезок $[-1, 1]$, поэтому область определения $\operatorname{Arc}\sin x$ тоже $[-1, 1]$. Аналогично для остальных функций:

Функция	*Область определения*
$\operatorname{Arc}\sin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{Arc}\cos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{Arc}\sec x$	$x < -1,\ x > 1$
$\operatorname{Arc}\operatorname{cosec} x$	$x < -1,\ x > 1$

В связи с периодичностью тригонометрических функций обратные тригонометрические функции бесконечнозначны (см. рис. 79—84), т. е. одному значению аргумента соответствует бесконечное множество значений функции. Например, $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \ldots$.

Выделяют *главные ветви* обратных тригонометрических функций, которые являются однозначными функциями и имеют те же области определения:

Главное значение	*Область определения*	*Область значений*
$y = \operatorname{arc}\sin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arc}\cos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$
$y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arc}\sec x$	$x < -1,\ x > 1$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x$	$x < -1,\ x > 1$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Используя главные значения, обратные тригонометрические функции можно записать так:

$$\operatorname{Arc}\sin x = (-1)^n \arcsin x + n\pi;$$

$$\operatorname{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2n\pi;$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + n\pi;$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x + n\pi.$$

2. Основные соотношения.

Выражение обратных тригонометрических функций через другие.

$$\operatorname{Arc}\sin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\cos x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin x = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{Arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \operatorname{Arc}\cos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Основные тригонометрические соотношения в применении к обратным тригонометрическим функциям приводят к равенствам:

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}};$$

$$\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}; \quad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\sin(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x) = \frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x) = x;$$

$$\sin(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\cos(\arccos x) = x;\ \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}};\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}};\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x.$$

Знак „+" или „—" выбирается в зависимости от того, в каком квадранте лежит аргумент.

Пример 1. Вычислить $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right]$.

Обозначим: $\arccos\left(-\frac{40}{41}\right) = \varphi$; тогда $\cos\varphi = -\frac{40}{41}$, а по определению $\arccos x$ и в силу отрицательности $\cos\varphi$ получим: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

Поэтому $\sin\varphi = +\sqrt{1-\cos^2\varphi}$, и

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{+\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{-\frac{40}{41}}{\frac{9}{41}} = -\frac{40}{9}.$$

Функции отрицательного аргумента:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x;$$
$$\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Пример 2.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 3. Вычислить:

$$\cos\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}\right].$$

Выкладки удобнее вести так:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<0;$$

$$\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}=\beta,\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{2}{3},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\sin\beta=\frac{1}{+\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{13}};$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\frac{9}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=$$

$$=\frac{9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}=\frac{9}{\sqrt{130}}.$$

Сумма и разность

$$\operatorname{Arc\,sin}x+\operatorname{Arc\,sin}y=\operatorname{Arc\,sin}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$$

для $x^2+y^2\leqslant 1$;

$$\operatorname{Arc\,sin}x-\operatorname{Arc\,sin}y=\operatorname{Arc\,sin}\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$$

для $x^2+y^2\leqslant 1$;

$$\operatorname{Arc\,cos}x+\operatorname{Arc\,cos}y=\operatorname{Arc\,cos}\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

для $x+y\geqslant 0$;

$$\operatorname{Arc}\cos x - \operatorname{Arc}\cos y = \begin{cases} -\operatorname{Arc}\cos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\ \qquad \text{для } x \geqslant y, \\ \operatorname{Arc}\cos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\ \qquad \text{для } x < y. \end{cases}$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x+y}{1-xy} \text{ для } xy < 1;$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x - \operatorname{Arc}\operatorname{tg} y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x-y}{1+xy} \text{ для } xy > -1;$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x + \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} y = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\frac{xy-1}{x+y} \text{ для } x \neq -y;$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x - \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} y = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\frac{xy+1}{y-x} \text{ для } x \neq y.$$

В. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие уравнения.

Уравнения	*Ограничения*	*Решения*
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$	нет	$x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} a + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$	нет	$x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} a + \pi n$
Частные случаи		
$\sin x = 0$		$x = \pi n$
$\sin x = 1$		$x = \frac{4n+1}{2}\pi$
$\sin x = -1$		$x = \frac{4n-1}{2}\pi$
$\cos x = 0$		$x = \frac{2n+1}{2}\pi$
$\cos x = 1$		$x = 2\pi n$
$\cos x = -1$		$x = (2n+1)\pi$
$\operatorname{tg} x = 0$		$x = \pi n$
$\operatorname{ctg} x = 0$		$x = \frac{2n+1}{2}\pi$

2. Распадающиеся тригонометрические уравнения.

Уравнения вида $\sin x = \sin 2x$ и т. п. решаются при помощи формул суммы и разности тригонометрических функций.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin 7x = \sin 5x.$$

Решение. Перенося функции в левую часть уравнения и применяя формулу для разности синусов, получим:

$$\sin 7x - \sin 5x = 0;$$

$$2\sin \frac{7x - 5x}{2} \cos \frac{7x + 5x}{2} = 0;$$

$$\sin x \cos 6x = 0.$$

Уравнение распадается на два:

$$\sin x = 0; \qquad \cos 6x = 0;$$

$$6x = \frac{2n+1}{2}\pi;$$

$$x = \pi n. \qquad x = \frac{2n+1}{12}\pi.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sin x.$$

Решение. Разлагая $\sin 2x$, перенося функции в одну сторону и вынося $\sin x$ за скобки, получим два уравнения:

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0;$$

$$\sin x (2\cos x - 1) = 0;$$

$$\cos x = \frac{1}{2}; \quad \sin x = 0;$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$$

$$x = \pi n.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x.$$

Решение.

$$\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 0;$$

$$(\sin x - \operatorname{tg} x)(\sin x + \operatorname{tg} x) = 0;$$

$$\left(\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 0;$$

$$\sin^2 x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0.$$

Данное уравнение распадается на три:

$$\sin x = 0; \qquad \cos x = 1; \qquad \cos x = -1;$$

$$x = \pi n. \qquad x = 2\pi n. \qquad x = (2n+1)\pi.$$

Корни второго и третьего уравнений совпадают с корнями первого. Поэтому ответ: $x = \pi n$.

3. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим. Часто оказывается удобным выразить все входящие в уравнение тригонометрические функции через одну и привести уравнение к алгебраическому.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

Решение. Заменяя $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0.$$

Обозначая $\cos x = y$, получим квадратное уравнение

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

которое имеет два корня $y = -1$, $y = 2$. Второй корень отбрасывается, так как $\cos x \neq 2$.

Решая уравнение $\cos x = -1$, найдем, что $x = (2n+1)\pi$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Решение. Выражая $\operatorname{ctg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$, получим

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$
$$(\operatorname{tg} x + 1)^2 = 0,$$
$$\operatorname{tg} x = -1,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{4n-1}{4}\pi.$$

Г. Решение прямолинейных треугольников

1. Основные теоремы и формулы.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Теорема синусов:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;\ \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

Формулы Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{\gamma}{2}};\quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Теоремы для половинных углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Радиус описанного круга:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma};$$

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Радиусы вписанного и вневписанных кругов:

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$r = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Медиана:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}.$$

Биссектриса:

$$w_\alpha = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Высота:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta.$$

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

2. Прямоугольные треугольники

(γ — прямой угол, c — гипотенуза, a, b — катеты, S — площадь).

Случай	Данные	Формулы
I	c, α	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, $S = \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha$
II	a, α	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin \alpha}$, $b = a \operatorname{ctg} \alpha$, $S = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha$
III	a, c	$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$, $b = c \sin \beta$, или $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$, $S = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} a \sqrt{(c+a)(c-a)}$
IV	a, b	$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$, $c = \frac{b}{\sin \alpha}$, $S = \frac{ab}{2}$, или $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

3. Косоугольные треугольники

I	a, β, γ	$\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$, $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$, $S = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
II	b, c, α	$\beta + \gamma = \pi - \alpha$, $\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}$, $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$, $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$; или:

Случай	Данные	Формулы
II	b, c, α	$a = \dfrac{(b-c)\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \dfrac{(b+c)\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$; или $a^2 = (b+c)^2\sin^2\varphi$, где $\cos^2\varphi = \dfrac{4bc\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{(b+c)^2}$
III	a, b, α	$\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$, $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $S = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$. Исследование: $\alpha \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ { $a \leqslant b$, решения нет; $a > b$, одно решение $\beta < \dfrac{\pi}{2}$. $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ { $a \geqslant b$, одно решение $\beta < \dfrac{\pi}{2}$; $a < b$ { $a < b\sin\alpha$, решения нет; $a = b\sin\alpha$, одно решение $\beta = \dfrac{\pi}{2}$; $a > b\sin\alpha$, два решения β' и $\beta'' = \pi - \beta'$
IV	a, b, c	$r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{p-a}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{p-b}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{p-c}$, $S = pr$

Д. Решение сферических треугольников

В сферической тригонометрии рассматривается решение треугольников, расположенных на сфере и образованных дугами больших кругов, меньших 180°.

1. Основные понятия и определения. Сечение сферы (шара) плоскостью, проходящей через центр сферы, называется *большим кругом*; радиус такого круга равен радиусу сферы.

Через две точки сферы, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести только одну окружность большого круга.

Меньшая дуга большого круга, проведенная через две данные на сфере точки A и B (рис. 35), является кратчайшим расстоянием на сфере между этими точками и называется *геодезической линией*.

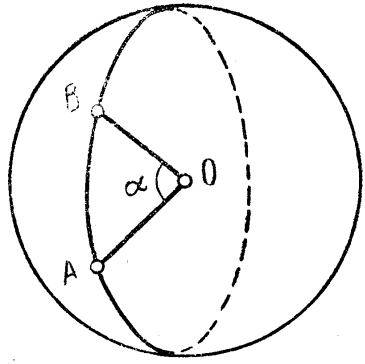


Рис. 35

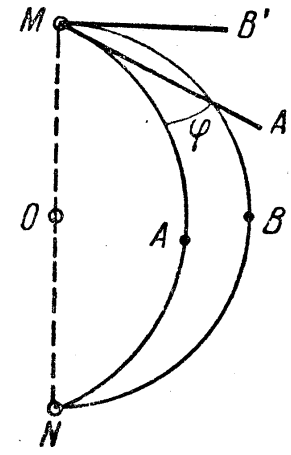


Рис. 36

Часть сферической поверхности, заключенная между двумя полуокружностями больших кругов, проходящих через одни и те же точки M и N (рис. 36), называется *сферическим двуугольником* (двусторонником или фюзо). Каждый сферический угол, например угол $AMB = ANB$ (рис. 36), измеряется линейным углом $A'MB'$ между двумя касательными в точке M. Площадь двуугольника $NAMB$ (рис. 36) будет

$$S = 2R^2 \varphi$$

(угол φ выражен в радианах).

Часть сферической поверхности, ограниченная тремя дугами больших кругов, пересекающимися в трех точках A, B и C, называется *сферическим треугольником* ABC (рис. 37). В сферическом треугольнике не может быть ни одной стороны, длина которой была бы равна или больше полуокружности. При соединении центра сферы O (рис. 37) с вершинами сферического треугольника ABC образуется трехгранный угол $OCAB$, двугранные углы которого равны углам α, β и γ сферического треугольника ABC.

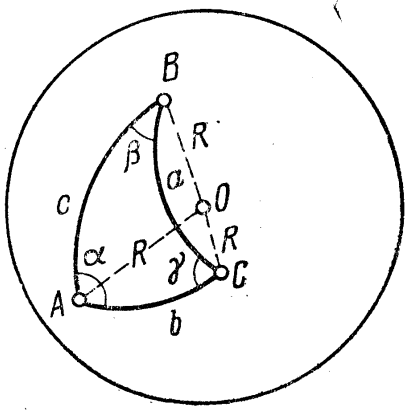


Рис. 37

Стороны сферического треугольника, обозначаемые буквами a, b и c, выражаются в угловых мерах и измеряются сферическими углами α, β и γ. Любая сторона сферического треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон его, например, $c < a + b$ и $c > a - b$.

В сферическом треугольнике сумма углов $\alpha + \beta + \gamma$ всегда больше 180°. Разность между суммою этих углов и 180° называется *сферическим избытком* и обозначается ε, т. е.

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°.$$

2. Основные формулы. a, b, c — стороны, α, β и γ — углы сферического треугольника (рис. 37).

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha; \\ \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta; \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}\right\} \left(\begin{matrix}\text{теорема} \\ \text{косинусов}\end{matrix}\right)$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a;$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos b;$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c.$$

$$\sin a \cdot \cos b = \cos \beta \cdot \sin c + \sin b \cdot \cos \gamma \cdot \cos a;$$

$$\sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos b = \cos \beta \cdot \sin \gamma + \sin \beta \cdot \cos \gamma \cdot \cos a;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin \gamma - \sin \beta \cdot \cos c \cdot \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} b \cdot \sin c - \cos \alpha \cdot \cos c.$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}; \qquad \left(\begin{array}{c}\text{теорема}\\ \text{синусов}\end{array}\right)$$

$$\sin a \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha;$$

$$\sin a \cdot \sin \gamma = \sin c \cdot \sin \alpha;$$

$$\sin b \cdot \sin \gamma = \sin c \cdot \sin \beta.$$

3. Прямоугольные треугольники (рис. 38, *а*). Сферический треугольник может быть решен по любым трем из его шести элементов (трех сторон и трех углов).

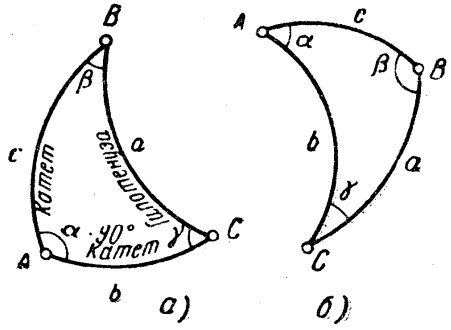


Рис. 38

$$\sin b = \sin a \cdot \sin \beta \text{ или}$$

$$\sin b = \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{tg} c;$$

$$\sin c = \sin a \cdot \sin \gamma \text{ или}$$

$$\sin c = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} b;$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \text{ или}$$

$$\cos a = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$\cos \beta = \cos b \cdot \sin \gamma; \qquad \cos \gamma = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b;$$

$$\cos \gamma = \cos c \cdot \sin \beta; \qquad \cos \beta = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} c.$$

4. Косоугольные треугольники (рис. 38, *б*). Для решения косоугольных сферических треугольников, кроме теорем косинусов (см. стр. 191), пользуются следующими формулами:

Случай	Данные	Формулы
1	a, b, c	$S = \frac{a+b+c}{2}$; $k^2 = \frac{\sin(S-a)\cdot\sin(S-b)\cdot\sin(S-c)}{\sin S}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{k}{\sin(S-a)}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{k}{\sin(S-b)}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{k}{\sin(S-c)}$
2	α, β, γ	$P = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180^\circ}{2}$; $\rho^2 = \frac{\sin(\alpha-P)\cdot\sin(\beta-P)\cdot\sin(\gamma-P)}{\sin P}$; $\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \frac{\rho}{\sin(\alpha-P)}$; $\operatorname{ctg}\frac{b}{2} = \frac{\rho}{\sin(\beta-P)}$; $\operatorname{ctg}\frac{c}{2} = \frac{\rho}{\sin(\gamma-P)}$
3	a, β, γ	$\cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$; $\sin\alpha\cdot\sin b = \sin\beta\cdot\sin a$; $\sin\alpha\cdot\cos b = \cos\beta\cdot\sin\gamma + \sin\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos a$; $\sin\alpha\cdot\sin c = \sin\gamma\cdot\sin a$; $\sin\alpha\cdot\cos c = \cos\gamma\cdot\sin\beta + \sin\gamma\cdot\cos\beta\cdot\cos a$; или, положив $\operatorname{ctg}\varphi = \cos a\cdot\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\lambda = \cos a\cdot\operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a\cdot\cos\varphi\cdot\sec(\gamma-\varphi)$ и $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a\cdot\cos\lambda\cdot\sec(\beta-\lambda)$;

Продолжение

Случай	Данные	Формулы
3	a, β, γ	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\varphi}{\sin b \cdot \sin(\gamma - \varphi)} = \operatorname{tg}\gamma \dfrac{\sin a \cdot \sin\lambda}{\sin c \cdot \sin(\beta - \lambda)}$
4	α, b, c	$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha;$ $\sin a \cdot \cos\beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha;$ $\sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha;$ $\sin a \cdot \cos\gamma = \sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha;$ $\sin a \cdot \sin\gamma = \sin c \cdot \sin\alpha$ или, положив $\operatorname{tg}\varphi = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg}\lambda = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg} c,$ $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin b \cdot \sin\alpha}{\cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sin c \cdot \sin\alpha}{\sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha};$ $\sin a = \sin b \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta = \sin c \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\gamma$
5	a, b, α	$\sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$ (для $\sin a > \sin b$); $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}c = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(a-b);$ $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Продолжение

Случай	Данные	Формулы
6	α, β, a	$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$ (для $\sin\alpha > \sin\beta$); $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$; $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

А. Метод координат и простейшие задачи

1. Декартова прямоугольная система координат. На плоскости введена *система координат*, если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек плоскости при помощи чисел. Наиболее употребительные системы координат: декартова прямоугольная и полярная (см. стр. 200).

Декартова прямоугольная система координат на плоскости определяется двумя взаимно перпендикулярными прямыми Ox и Oy (рис. 39), на которых выбраны положительные направления (указываемые стрелками)

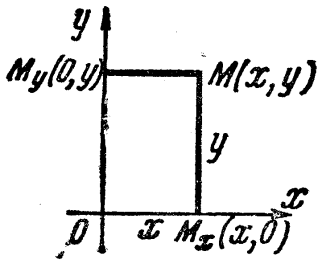


Рис. 39

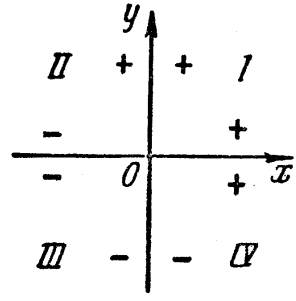


Рис. 40

и масштаб для измерения длин. Эти прямые называются *осями координат* (ось Ox — *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*, точка O пересечения осей — *началом координат*). Положительное направление на оси Ox выбирается обычно вправо, а на оси Oy — вверх. Такая система координат называется *правой*. В ней поворот

от оси Ox к оси Oy (на наименьший угол) до их совмещения осуществляется против движения часовой стрелки.

Если же такой поворот осуществляется по движению часовой стрелки, то система называется *левой*.

Оси координат делят плоскость на четыре *четверти* (*квадранты*).

Положение произвольной точки M на плоскости вполне определяется заданием двух чисел x и y; число x выражает в выбранном масштабе расстояние от точки M до оси ординат ($x = OM_x$ на рис. 39), число y — расстояние от точки M до оси абсцисс ($y = OM_y$). Числа x и y называются *декартовыми прямоугольными координатами* (соответственно *абсциссой* и *ординатой*) точки M и берутся со знаком (+), если направления отрезков OM_x и OM_y совпадают с положительными направлениями на осях Ox и Oy или со знаком (—) в противном случае. На рис. 40 дана схема распределения знаков координат в различных четвертях и нумерация четвертей. Запись $M(x, y)$ означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y.

2. Расстояние между двумя точками (рис. 41). Как бы ни были расположены на плоскости точки

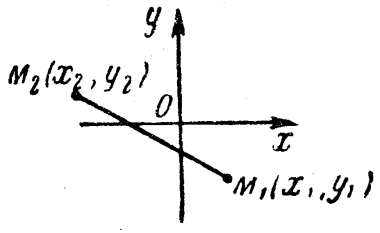


Рис. 41

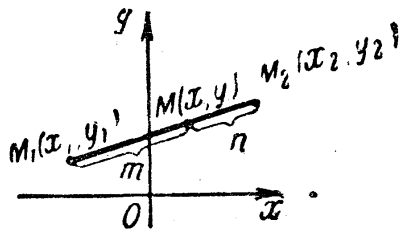


Рис. 42

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

в которой корень берется со знаком плюс (+).

Частный случай. Расстояние от точки $M(x,y)$ до начала координат $O(0, 0)$ равно

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пример. Расстояние между точками $M_1(-3, 5)$ и $M_2(1, 2)$ равно

$$d = \sqrt{[1-(-3)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

3. Деление отрезка в данном отношении. Если заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и известно, что какая-то точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ (рис. 42), т. е. что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda = \frac{m}{n},$$

то координаты x и y точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

или

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}.$$

Частный случай. Координаты x и y середины M отрезка M_1M_2 определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

так как $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda = 1$.

Координаты x и y центра тяжести материальных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ соответственно с массами m_1 и m_2 определяются по формулам

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Координаты x и y центра тяжести однородной треугольной пластинки выражаются через координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) ее вершин по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

4. Преобразование декартовых координат. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой можно осуществить двумя преобразованиями: 1) параллельным переносом осей и 2) поворотом осей на угол α.

При *параллельном переносе* осей из положения Oxy в новое положение $O'x'y'$ (рис. 43) координаты точки M в старой и новой системах координат связаны соотношениями

$$x = x' + a, \quad y = y' + b$$

или

$$x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

где x и y — старые координаты точки M; x' и y' — ее новые координаты; a и b — координаты нового начала O' в старой системе.

При *повороте осей* на некоторый угол α (рис. 44) старые координаты x, y связаны с новыми x',y' соотношениями

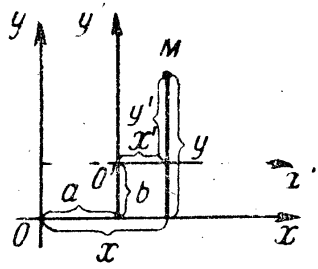


Рис. 43

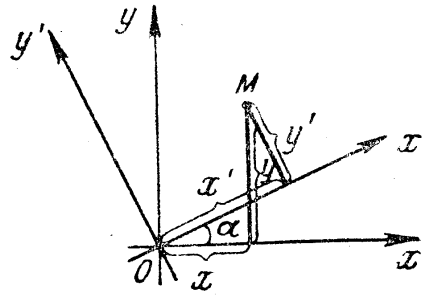


Рис. 44

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

или

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

В общем случае преобразования правой прямоугольной системы координат имеют место формулы

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha;$$

$$y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

5. Полярные координаты. *Полярная система координат* определяется заданием точки O (*полюса*), луча OA, исходящего из точки O (*полярной оси*), и масштаба для измерения длин. Положение точки M на плоскости определяется в полярной системе координат двумя числами: *полярным радиусом* $\rho = OM$ (рис. 45), выражающим длину отрезка OM в выбранном масштабе, и *полярным углом* $\theta = \angle AOM$ (в радианной мере, см. стр. 128). Полярный угол считают положительным, если он отсчитывается от полярной оси в направлении против движения часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае. Положительное направление отсчета углов обычно обозначают на чертеже дужкой со стрелкой (рис. 45). Числа ρ и θ называются *полярными координатами* точки M, что записывают так: $M(\rho, \theta)$.

6. Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Если полярную и декартову прямоугольную системы координат совместить так, чтобы полюс совпал с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси Ox (рис. 46), то независимо от расположения точки M на плоскости получим формулы перехода от полярных координат ρ, θ к декартовым x, y:

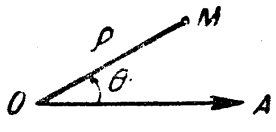


Рис. 45

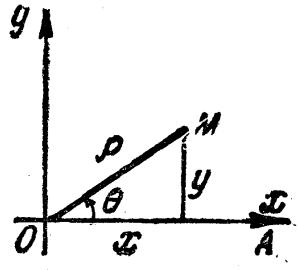


Рис. 46

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta;$$

и от декартовых к полярным:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

Пример. Определить вид кривой

$$\rho = \cos\theta.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на ρ получим

$$\rho^2 = \rho\cos\theta.$$

Воспользуемся формулами перехода:

$$\rho^2 = x^2 + y^2;$$

$$\rho\cos\theta = x.$$

Итак, получим

$$x^2 + y^2 = x \text{ или } x^2 - x + y^2 = 0,$$

т. е. уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Эта окружность проходит через начало координат.

7. Уравнение линии. Уравнение с двумя переменными обозначают так:

$$F(x, y) = 0 \text{ или } y = f(x),$$

где $F(x, y)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее x и y.

Уравнением данной линии называется уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней. Величины x и y называются *текущими координатами* линии.

Линия, определенная данным уравнением, есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Линия, определяемая уравнением вида $y = f(x)$, называется *графиком* функции $f(x)$.

Если $F(x, y)$ — многочлен, то линия $F(x, y) = 0$ называется *алгебраической*. В этом случае степень многочлена называется *порядком* линии.

Для отыскания точек пересечения двух линий

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

необходимо решить совместно уравнения этих линий, при этом каждое решение системы

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0; \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

определяет одну из точек пересечения.

Б. Прямая линия

1. Уравнение прямой. В декартовой системе координат каждая прямая определяется уравнением первой степени и, обратно, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Углом наклона прямой к оси Ox называется угол, на который надо повернуть положительное направление оси Ox против движения часовой стрелки до совмещения с данной прямой. Если прямая параллельна оси Ox, то угол ее наклона к оси Ox считается *равным нулю.*

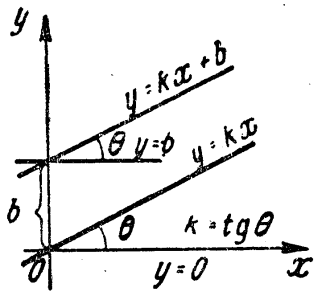


Рис. 47

Каждая прямая, не перпендикулярная к оси Ox, может быть определена уравнением

$$y = kx + b, \qquad (1)$$

где k — *угловой коэффициент* прямой, равный тангенсу угла наклона ее к оси Ox, т. е. $k = \operatorname{tg}\theta$ (рис. 47), b (*начальная ордината*) — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, взятая со знаком „+“, если отрезок расположен над осью Ox, и со знаком „—“ в противном случае.

При $b = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = kx$$

и определяет *прямую, проходящую через начало координат* (рис. 47). Это уравнение выражает прямую пропорциональную зависимость переменных величин x и y (см. стр. 235).

При $k = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = b$$

и определяет *прямую, параллельную оси Ox* и отстоящую от нее на расстоянии, равном b (рис. 47).

При $k = 0$ и $b = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = 0$$

и определяет ось Ox (рис. 47).

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ *в данном направлении* $k = \operatorname{tg}\theta$:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2)$$

Если k считать здесь переменной величиной, принимающей различные значения, то уравнение (2) называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через данную точку M.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Ее угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Условие того, что три данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ *лежат на одной прямой*:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3)$$

Частные случаи

1) $C=0$, уравнение (3) принимает вид:

$$Ax + By = 0$$

и определяет прямую, *проходящую через начало координат* (рис. 48).

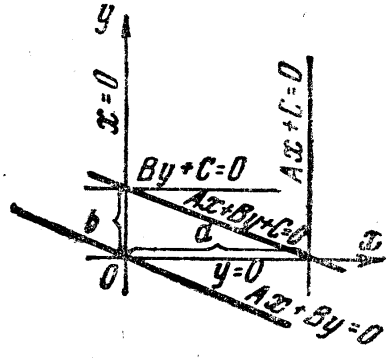


Рис. 48

2) $B = 0$ ($A \neq 0$), уравнение (3) принимает вид:

$$Ax + C = 0 \text{ или } x = -\frac{C}{A} = a$$

и определяет прямую, *параллельную оси Oy* (рис. 48). Если, кроме того, $C = 0$, то получаем *уравнение оси Oy*:

$$x = 0.$$

3) $A = 0$ ($B \neq 0$), уравнение (3) принимает вид:

$$By + C = 0 \text{ или } y = -\frac{C}{B} = b$$

и определяет прямую, *параллельную оси Ox* (рис. 48). Если, кроме того, $C = 0$, то получаем *уравнение оси Ox*:

$$y = 0.$$

Общее уравнение прямой (3) можно привести к виду уравнения с угловым коэффициентом (если $B \neq 0$), решив его относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Таким образом, по данным коэффициентам A, B, C уравнения (3) можно вычислить угловой коэффициент k и длину отрезка b уравнения (1):

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{4}$$

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{5}$$

Здесь a и b — величины отрезков, которые прямая отсекает соответственно на осях Ox и Oy, считая каждый от начала координат и учитывая знак (рис. 49).

Общее уравнение прямой (3) можно привести к виду уравнения в отрезках (если только ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю), причем:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{6}$$

Уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения прямой на чертеже. По заданным a и b строим точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ пересечения прямой с осями координат (рис. 49) и через эти две точки проводим прямую.

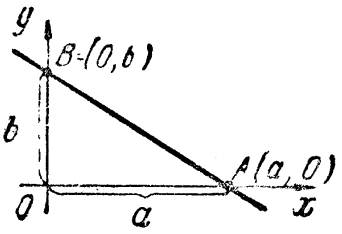


Рис. 49

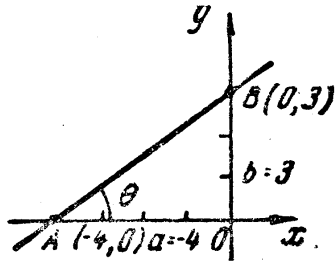


Рис. 50

Пример. Дана прямая своим общим уравнением

$$3x - 4y + 12 = 0.$$

Составить для этой прямой уравнение с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках и построить прямую.

Решение. Имеем: $A = 3$, $B = -4$, $C = 12$ [сравниваем с уравнением (3)]. Найдем угловой коэффициент k прямой и длину b отрезка (с учетом знака), отсекаемого прямой на оси Oy [см. равенства (4)]:

$$k = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{12}{-4} = 3.$$

Уравнение данной прямой с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Таким образом, данная прямая составляет с осью Ox угол θ, тангенс которого равен $\frac{3}{4}$.

На основании первого равенства (6) найдем длину a отрезка (с учетом знака), отсекаемого прямой на

оси Ox (длину b отрезка, отсекаемого на оси Oy, мы уже нашли):

$$a = -\frac{12}{3} = -4.$$

Уравнение данной прямой в отрезках:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Строим теперь точки $A(-4, 0)$ и $B(0, 3)$ пересечения данной прямой с осями координат (рис. 50) и через эти точки проводим прямую.

2. Угол между двумя прямыми. Если две прямые заданы уравнениями:

$$y = k_1 x + b_1; \quad y = k_2 x + b_2,$$

то угол φ между ними определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{7}$$

(угол φ отсчитывается от 1-й прямой ко 2-й против часовой стрелки).

Пример. Вычислить угол между прямой $2x-3y+6=0$ и прямой, проходящей через точки $(4, -5)$ и $(-3, 2)$.

Решение. Составим уравнение 2-й прямой (см. стр. 203):

$$\frac{y+5}{2+5} = \frac{x-4}{-3-4} \text{ или } x + y + 1 = 0.$$

Находим угловые коэффициенты заданных прямых:

$$k_1 = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}; \; k_2 = -\frac{1}{1} = -1.$$

По формуле (7) находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 + (-1) \cdot \frac{2}{3}} = -5.$$

Воспользовавшись табл. 21 на стр. 444 и учитывая знак тангенса, найдем искомый угол между прямыми:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}(-5) = 101°20'.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$k_2 = k_1 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Пример 1. Через точку (—2, —1) провести прямую параллельно прямой $2x - y + 5 = 0$.

Решение. Пишем уравнение пучка прямых (см. стр. 203), проходящих через заданную точку (—2, —1):

$$y + 1 = k(x + 2).$$

Находим угловой коэффициент заданной прямой:

$$k_1 = -\frac{2}{-1} = 2.$$

На основании условия параллельности прямых заключаем, что

$$k = k_1 = 2.$$

Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$y + 1 = 2(x + 2) \quad \text{или} \quad 2x - y + 3 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение высоты BD треугольника ABC (рис. 51), если известны координаты его вершин: $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $C(6, 3)$.

Решение. Найдем уравнение стороны AC треугольника:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{6-2}$$

или $x - 2y = 0$.

Ее угловой коэффициент (k_{AC})

$$k_{AC} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

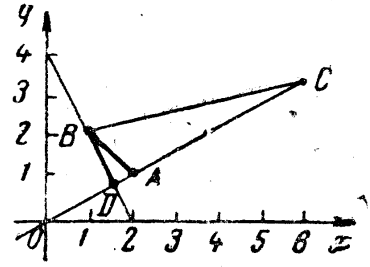


Рис. 51

Высота BD треугольника принадлежит пучку прямых, проходящих через точку B:

$$y - 2 = k(x - 1).$$

Угловой коэффициент высоты BD найдем из условия перпендикулярности AC и BD:

$$k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}} = -2.$$

Пишем уравнение высоты BD:

$$y - 2 = -2(x - 1) \text{ или } 2x + y - 4 = 0.$$

3. Пересечение двух прямых. Если две прямые заданы уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

причем $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то координаты x_0, y_0 точки их пересечения находят совместным решением этих уравнений:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

то данные прямые параллельны (см. стр. 207), в частности, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то прямые совпадают.

Пример 1. Найти точку пересечения прямых:

$$2x - y - 5 = 0;$$
$$3x + 3y - 3 = 0.$$

Решение. Так как $\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{3}$, то прямые пересекаются. Помножив первое уравнение на 3 и сложив со вторым, получим:

$$9x - 18 = 0; \; x = 2.$$

Подставив в первое уравнение $x = 2$, найдем

$$4 - y - 5 = 0; \quad y = -1.$$

Итак, данные прямые пересекаются в точке $(2, -1)$.

Пример 2. Найти точку пересечения прямых:

$$2x + 3y - 5 = 0;$$

$$6x + 9y - 13 = 0.$$

Решение. В данном случае $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} \neq \frac{5}{13}$, следовательно, прямые параллельны. В самом деле, решая совместно эти уравнения (для этого достаточно из первого уравнения, умноженного на 3, вычесть второе), получим противоречивое равенство $-2 = 0$, свидетельствующее о том, что данная система несовместна.

Пример 3. Найти точку пересечения прямых:

$$2x + 3y - 5 + 0;$$

$$6x + 9y - 15 = 0.$$

Решение. Данные прямые совпадают, так как

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{-5}{-15}.$$

В. Кривые второго порядка

1. Окружность *Уравнение окружности* имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \qquad (1)$$

где a и b — координаты центра C окружности, R — ее радиус (рис. 52).

Частные случаи. 1. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (1')$$

2. Если окружность радиуса R проходит через начало координат и ее центр лежит на оси Ox, то уравнение окружности запишется так:

$$x^2 + y^2 \pm 2Rx = 0.$$

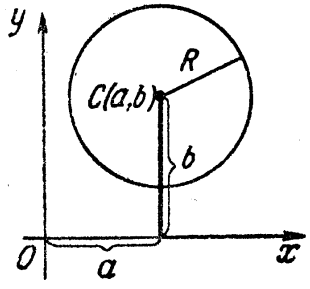


Рис. 52

3. Если окружность радиуса R проходит через начало координат и ее центр лежит на оси Oy, то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 \pm 2Ry = 0.$$

Общее уравнение 2-й степени относительно x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

изображает *окружность*, если его коэффициенты A, B, C удовлетворяют двум условиям:

$$A = C \text{ и } B = 0,$$

т. е. когда оно может быть приведено к виду

$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0. \qquad (2)$$

При этом радиус R и координаты a и b центра окружности можно вычислить по формулам:

$$R = \sqrt{D'^2 + E'^2 - F'};\ a = -D',\ b = -E'.$$

Возможны три случая:

а) $D'^2 + E'^2 - F' > 0$, уравнение (2) изображает окружность;

б) $D'^2 + E'^2 - F' = 0$, уравнение (2) изображает одну точку $C(a, b)$;

в) $D'^2 + E'^2 - F' < 0$, уравнение (2) не имеет геометрического смысла.

Построение точек дуги окружности. Если AC — половина хорды, CB — стрелка (рис. 53) дуги окружности, центр которой находится за пределами чертежа, то точки дуги можно найти следующим построением. Проводим $BE \parallel AC$, $AD \perp AC$, $AE \perp AB$. Делим AC, AD и BE на одинаковое число равных

частей и соединяем точки деления AC и BE (как показано на рис. 53), а также точку B с точками деления AD. Точки пересечения одинаково занумерованных прямых и будут точками искомой дуги окружности.

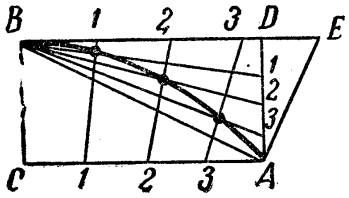


Рис. 53

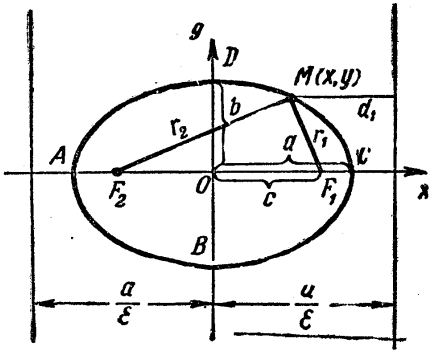


Рис. 54

2. Эллипс. Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная (равная $2a$).

Уравнение эллипса. Если прямую F_1F_2 принять за ось Ox, а прямую, к ней перпендикулярную и проходящую через середину отрезка F_1F_2, — за ось Oy (рис. 54), то получим *каноническое* уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3)$$

где a и b — полуоси эллипса. Эллипс, заданный уравнением (3), симметричен относительно координатных осей Ox и Oy.

Элементы эллипса (рис. 54): отрезок $AC=2a$ — *большая ось*, отрезок $BD=2b$ — *малая ось*, отрезок F_1F_2 — *фокальное расстояние*, отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ — *фокальные радиусы* точки M, точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — *фокусы* эллипса, точки $A(-a, 0)$, $B(0, -b)$, $C(a, 0)$ и $D(0, b)$ пересечения эллипса с осями координат — его *вершины*, точка O (начало координат) — его *центр*. Величины a, b, c эллипса связаны соотношениями:

$$c<a,\ c^2=a^2-b^2.$$

Эксцентриситетом эллипса (он обозначается буквой ε) называется отношение фокального расстояния ($2c$) к длине большой оси ($2a$):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Эксцентриситет всякого эллипса меньше единицы ($\varepsilon < 1$). Чем больше ε, тем более вытянут эллипс.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 точки $M(x, y)$ эллипса вычисляются по формулам:

$$r_1 = a - \varepsilon x;\ r_2 = a + \varepsilon x;\ r_1 + r_2 = 2a.$$

Директрисами эллипса называются две прямые, перпендикулярные к его большой оси и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него (рис. 54).

Уравнения директрис эллипса:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Уравнение *касательной* к эллипсу, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Касательная к эллипсу является биссектрисой угла между продолжением фокального радиуса F_1M и фокальным радиусом F_2M.

Площадь эллипса: $S = \pi ab$.

Периметр эллипса:

$$L = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots\right],$$

где ε — эксцентриситет эллипса.

Связь эллипса с окружностью. Уравнение окружности (1′) является частным случаем канонического уравнения эллипса (3) при $a = b$. Для окружности $\varepsilon = 0$; следовательно, окружность есть

частный случай эллипса, полуоси которого равны между собой (эксцентриситет ε которого равен нулю).

Проекция окружности на произвольную плоскость является эллипсом.

Построение эллипса по точкам. а) *Способ двух окружностей* Если известны длины полуосей эллипса a и b ($a > b$), то из начала координат O, как из центра, описываем две концентрические окружности радиусами a и b (рис. 55). Проводим произвольный радиус OC большой окружности. Из точки C проводим прямую, параллельную оси Oy, а из точки D пересечения OC с малой окружностью проводим прямую, параллельную оси Ox. Точка M пересечения этих прямых и есть точка эллипса. Аналогично строим и другие точки эллипса.

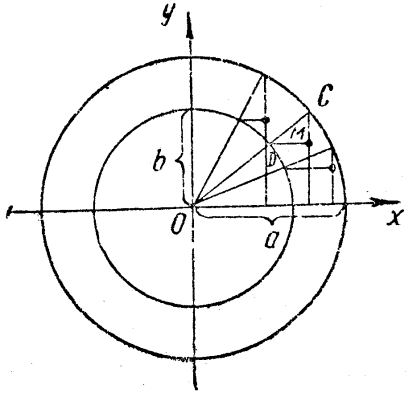


Рис. 55

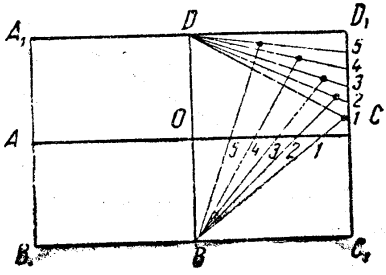


Рис. 56

б) *Способ проективных пучков.* Строим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ с центром в начале координат и со сторонами, равными $2a$ и $2b$ (рис. 56). Отрезки OC и CD_1 делим на одинаковое число равных частей и затем из точек B и D проводим два пучка лучей (как показано на рис. 56). Точки пересечения одинаково занумерованных лучей и являются точками эллипса. Остальные четверти эллипса строятся аналогично.

3. Гипербола. Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная (равная $2a$).

Уравнение гиперболы. Если прямую F_1F_2 принять за ось Ox, а прямую, к ней перпендикулярную и проходящую через середину отрезка F_1F_2, — за ось Oy (рис. 57), то получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

где a и b — полуоси гиперболы. Гипербола, заданная уравнением (4), симметрична относительно координатных осей Ox и Oy.

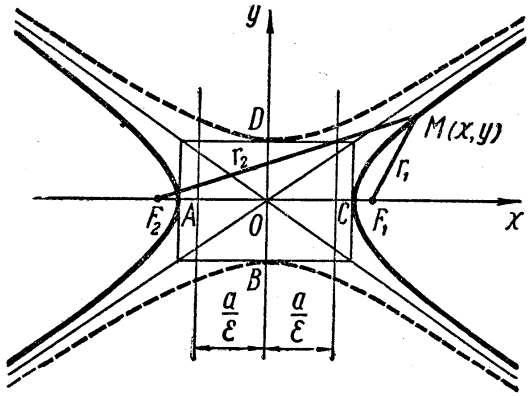


Рис. 57

Элементы гиперболы (рис. 57): гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой), простирающихся в бесконечность, отрезок $AC = 2a$ — *действительная ось* (пересекает гиперболу), отрезок $BD = 2b$ — *мнимая ось* (не пересекает гиперболы), отрезок $F_2F_1 = 2c$ — *фокальное расстояние*; отрезки $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ — *фокальные радиусы* точки M, точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — *фокусы* гиперболы, точки $A(-a, 0)$ и $C(a, 0)$ пересечения гиперболы с ее действительной осью — ее *вершины*, точка O (начало координат) — ее *центр*. Величины a, b, c гиперболы связаны соотношениями:

$$c > a, \; c^2 = a^2 + b^2.$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокального расстояния ($2c$) к длине большой оси ($2a$):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Эксцентриситет всякой гиперболы больше единицы ($\varepsilon > 1$). Чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут так называемый *основной* прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы, центр которого совпадает с центром гиперболы (рис. 57).

Фокальные радиусы точки гиперболы с абсциссой x вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \varepsilon x; \\ r_2 &= a + \varepsilon x \end{aligned}\right\}$$ для точек правой ветви гиперболы,

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a - \varepsilon x; \\ r_2 &= -a - \varepsilon x \end{aligned}\right\}$$ для точек левой ветви гиперболы.

Директрисами гиперболы называются две прямые, перпендикулярные к ее действительной оси и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него (рис. 57).

Уравнения директрис гиперболы:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Асимптотами гиперболы (рис. 57) называются прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность. Направления асимптот совпадают с направлениями диагоналей основного прямоугольника.

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Уравнение *касательной* к гиперболе, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Касательная к гиперболе является биссектрисой угла между фокальными радиусами точки касания. Для любой точки M гиперболы отрезок касательной между асимтотами делится пополам в точке касания.

Сопряженные гиперболы. Если гипербола задана уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (4')$$

то ее действительная ось расположена на оси Oy, а мнимая ось — на оси Ox (на рис. 57 эта гипербола изображена пунктиром). Вершинами этой гиперболы будут точки $D(0, b)$ и $B(0, -b)$, а асимптотами — асимптоты гиперболы (4).

Две гиперболы, определяемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

называются *сопряженными*.

У сопряженных гипербол действительная ось одной является мнимой осью другой, мнимая же ось одной является действительной осью другой. Сопряженные гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Равносторонняя гипербола — гипербола с равными полуосями ($a=b$). Ее уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ или } x^2-y^2=a^2.$$

Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны. Их уравнения:

$$y=x \text{ и } y=-x.$$

Эксцентриситет всякой равносторонней гиперболы есть величина постоянная:

$$\varepsilon=\sqrt{2}.$$

Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы (рис. 58), то ее уравнение примет вид

$$xy=\frac{a^2}{2}$$

или, если ввести обозначение $\frac{a^2}{2} = m$,

$$y = \frac{m}{x}.$$

Таким образом, равносторонняя гипербола, отнесенная к асимптотам, представляет собой график обратной пропорциональной зависимости.

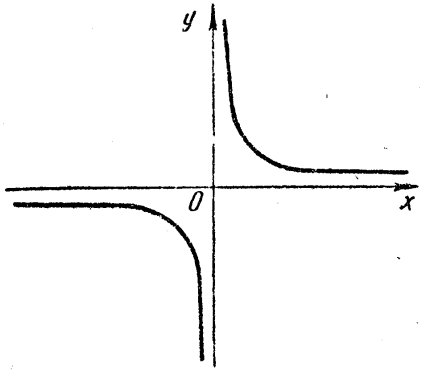


Рис. 58

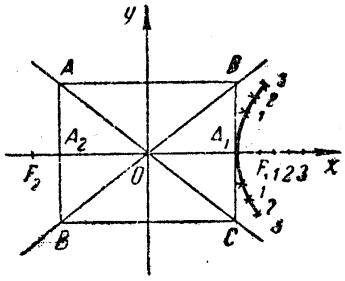


Рис. 59

Построение точек гиперболы по заданным ее полуосям. Строим прямоугольник $ABCD$ с центром O и со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 59). Проводим диагонали AC и BD прямоугольника. На оси Ox от точки O откладываем отрезки OF_1 и OF_2, равные OA (половине диагонали). Точки F_1 и F_2 — фокусы искомой гиперболы. Затем отмечаем на оси Ox произвольные точки *1*, *2*, *3* и т. д., из фокуса F_1 описываем дуги радиусами $A_1 1$, $A_1 2$, $A_1 3$ и т. д. и из фокуса F_2 — дуги радиусами $A_2 1$, $A_2 2$, $A_2 3$ и т. д., точки *1*, *2*, *3* и т. д. пересечения соответственных дуг будут точками гиперболы. Выбирая точки на оси Ox левее фокуса F_2, построим аналогично точки левой ветви гиперболы.

4. Парабола. Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Уравнение параболы. Если прямую, проходящую через фокус перпендикулярно к директрисе AB,

выбрать за ось Ox, причем за положительное направление на ней взять направление от директрисы к фокусу (рис. 60), а за начало координат принять середину O отрезка FK, то каноническое уравнение параболы примет вид:

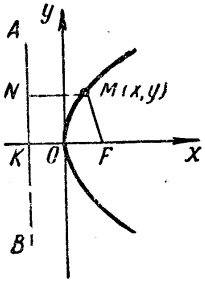


Рис. 60

$$y^2 = 2px, \qquad (5)$$

где p — *фокальный параметр* параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Парабола, заданная уравнением (5), симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.

Элементы параболы (рис. 60): парабола простирается в бесконечность, ось Ox — *ось параболы*, O — ее *вершина*, точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ — ее *фокус*, отрезок $FM = r$ — *фокальный радиус* точки M параболы, AB — *директриса параболы* (директриса и фокус находятся по разные стороны от вершины параболы на одинаковом расстоянии от нее).

В отличие от эллипса и гиперболы *парабола не имеет центра*.

Эксцентриситет всякой параболы равен единице ($\varepsilon = 1$).

Фокальный радиус r точки $M(x, y)$ параболы вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Уравнение директрисы параболы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Уравнение *касательной* к параболе, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Касательная к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом точки параболы и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису.

Длина дуги OM параболы (считая от вершины O до точки M с координатами x, y):

$$\overset{\frown}{OM} = s \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (6)$$

правая часть которого есть квадратный трехчлен, представляет собой *уравнение параболы, ось которой параллельна оси* Oy (рис. 61). При $a > 0$ парабола будет восходящей, при $a < 0$ — нисходящей. Параметр p и координаты x_0 и y_0 вершины O_0 параболы, заданной уравнением (6), вычисляются по формулам:

$$2p = \frac{1}{|a|};\ x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

На рис. 61 изображена парабола, заданная уравнением

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Координаты ее вершины O_0 равны:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2,\ y_0 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - 16}{4 \cdot 1} = 1.$$

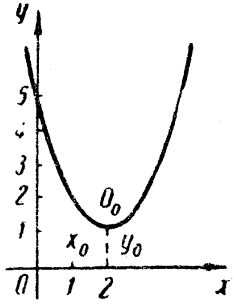


Рис. 61

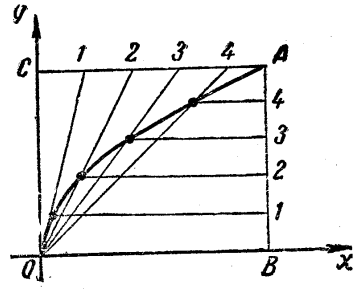


Рис. 62

Построение параболы по точкам. (*Способ проективных пучков*). Если заданы: ось параболы (ось Ox), вершина O параболы и какая-нибудь ее точка A (рис 62), то точки параболы можно найти следующим построением. Перпендикуляры AB и AC, опущенные из точки A на оси координат, делим на одинаковое число частей и нумеруем, как показано

на рис. 62. Точку O соединяем затем с точками деления отрезка AC, и из точек деления отрезка AB проводим прямые, параллельные оси Ox, до пересечения с соответственно занумерованным лучом из O. Точки пересечения одинаково занумерованных отрезков и будут точками искомой параболы.

Точки нижней половины параболы строятся аналогично.

5. Общие свойства кривых второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются *кривыми второго порядка* потому, что в декартовой прямоугольной системе координат они определяются алгебраическими уравнениями второй степени относительно x и y.

Геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых отношение расстояний r до некоторой точки F (*фокуса*) к соответствующим расстояниям d до некоторой прямой (*директрисы*) величина постоянная (равная ε), $\frac{r}{d} = \varepsilon$, то это есть кривая второго порядка с эксцентриситетом, равным ε. При $\varepsilon < 1$ это будет *эллипс*, при $\varepsilon > 1$ — *гипербола*, при $\varepsilon = 1$ — *парабола*.

Конические сечения. Кривые второго порядка называются иначе *коническими сечениями*, так как они могут быть получены как линии пересечения поверхности кругового конуса с плоскостью (не проходящей через вершину конуса). Коническая поверхность мыслится неограниченно продолженной в обе стороны от вершины и, следовательно, состоящей из двух полостей (рис. 63).

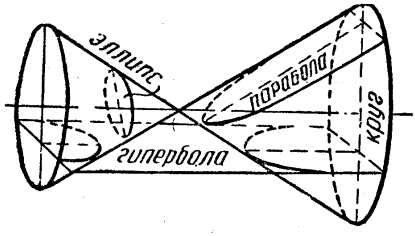


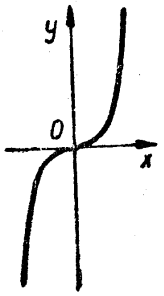
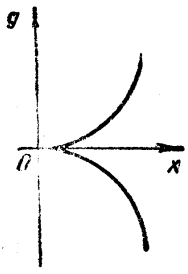
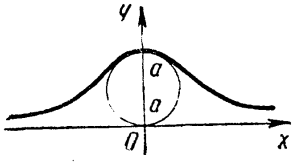
Рис. 63

Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса и не параллельна ни одной из его образующих (рис. 63), то сечение будет *эллипсом* (или, в частности, *окружностью*).

Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса и параллельна одной из образующих, то сечение будет *параболой*.

Если секущая плоскость пересекает обе полости конуса, то сечение будет *гиперболой*.

Г. Некоторые замечательные кривые

Название; уравнение	График
1. Кубическая парабола $y = ax^3$	
2. Полукубическая парабола $y = ax^{3/2}$	
3. Верзьера Аньези $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ или $\begin{cases} x = 2a \operatorname{ctg} \Theta; \\ y = 2a \sin^2 \Theta \end{cases}$	

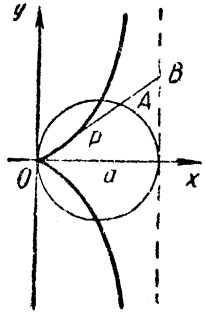
Название; уравнение	График

4. Циссоида Диокла

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \quad \text{или}$$

$$\rho = a(\sec\varphi - \cos\varphi)$$

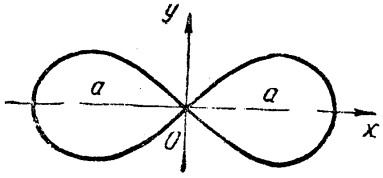
$(OP = AB)$



5. Лемниската Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

или $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$

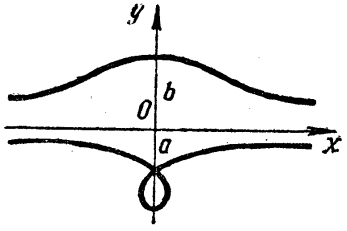


6. Конхоида Никомеда

$$x^2y^2 = (y + a)^2(b^2 - y^2)$$

или $\rho = a\,\mathrm{cosec}\,\varphi \pm b$

(на рисунке $a < b$)

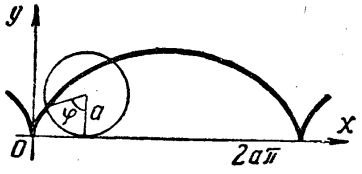


7. Обыкновенная циклоида

$$x = a \arccos\frac{a - y}{a} \mp$$

$$\mp \sqrt{2ay - y^2}$$

или $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$

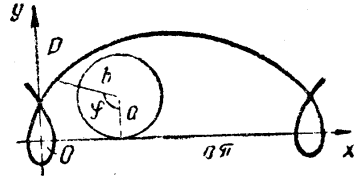


Название; уравнение	График

8. Удлиненная циклоида

$$\begin{cases} x = a\varphi - b\sin\varphi; \\ y = a - b\cos\varphi \end{cases}$$

$(a < b)$

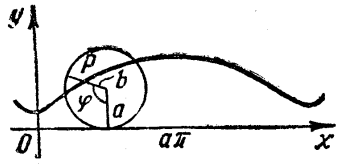


9. Укороченная циклоида

$$x = a\varphi - b\sin\varphi;$$

$$y = a - b\cos\varphi$$

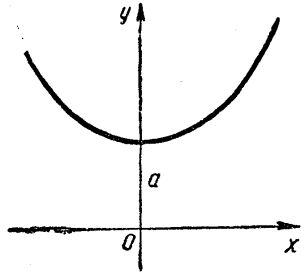
$(a > b)$



10. Цепная линия

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) =$$

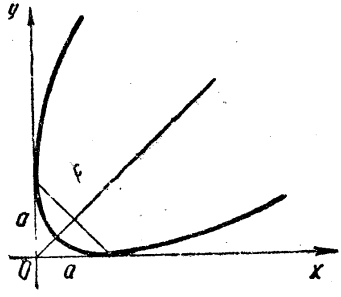
$$= a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$



11. Парабола

$$\pm x^{1/2} \pm y^{1/2} = a^{1/2} \quad \text{или}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

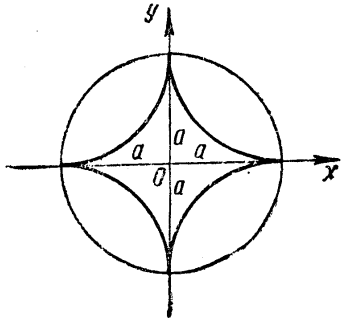


Название; уравнение	График

12. Гипоциклоида с четырьмя ветвями (астроида)

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ или

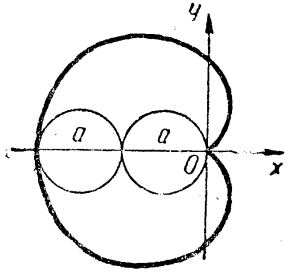
$$\begin{cases} x = a\cos^3\Theta; \\ y = a\sin^3\Theta \end{cases}$$



13. Кардиоида

$(x^2 + y^2 + ax)^2 + a^2(x^2 + y^2)$ или

$\rho = a(1 - \cos\varphi)$

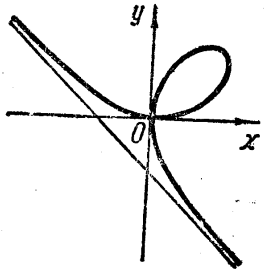


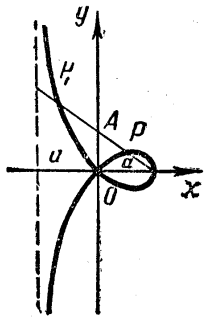
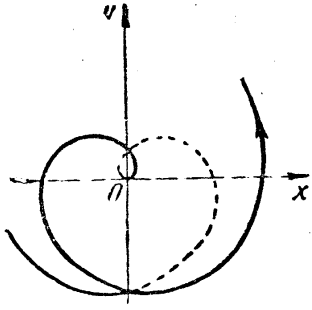
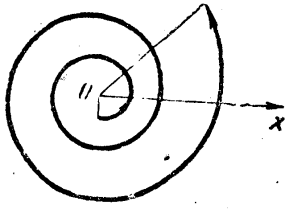
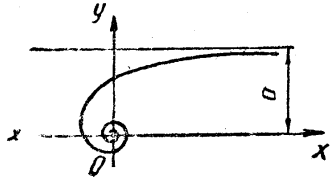
14. Декартов лист

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ или

$$\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$ или

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

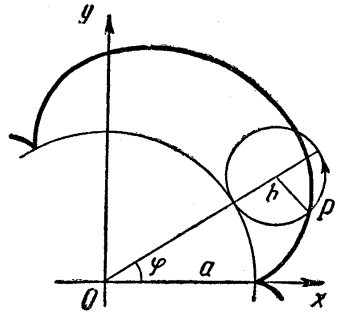


Название; уравнение	График
15. Строфоида $y^2 = x^2 \dfrac{a-x}{a+x}$ или $\rho = \dfrac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$	
16. Архимедова спираль $\rho = a\varphi$	
17. Логарифмическая спираль $\rho = ae^{k\varphi}$	
18. Гиперболическая спираль $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$	

Название; уравнение	График

19. Эпициклоида

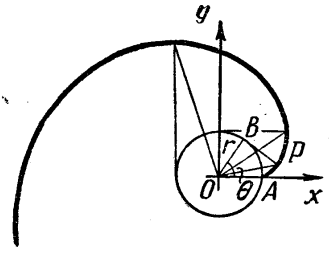
$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\varphi - b\cos\dfrac{a+b}{b}\varphi; \\ y = (a+b)\sin\varphi - b\sin\dfrac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$



При $a = b$ получаем кардиоиду (см. кривую 13)

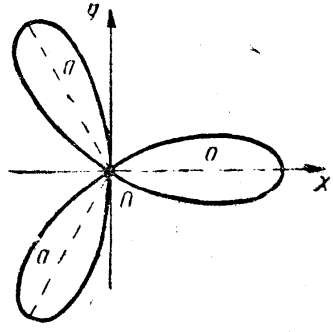
20. Развертка окружности

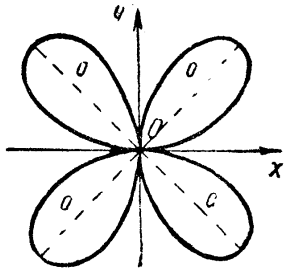
$$\begin{cases} x = r\cos\Theta + r\,\Theta\sin\Theta; \\ y = r\sin\Theta - r\,\Theta\cos\Theta \end{cases}$$



21. Трехлепестковая роза

$\rho = a\cos 3\varphi$



Название; уравнение	График
22. Четырехлепестковая роза $\rho = a \sin 2\varphi$	

Д. Векторы

1. Определения. *Вектор* — величина, связанная с направлением (сила, напряжение, скорость, ускорение и т. д.). Обозначается либо жирным шрифтом $\boldsymbol{a}$, либо чертой над буквой: $\overline{a}$. *Скаляр* — величина, не связанная с направлением (температура, масса, плотность и т. д.).

Вектор может быть изображен в виде направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ прямой (рис. 64). Длина отрезка, равная „величине" вектора, называется его *модулем*. Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\overline{a}|$, AB, a. Векторы, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы лежат на параллельных прямых или же на одной прямой. Вектор, начало которого можно свободно перемещать, называется *свободным*. Вектор, который можно перемещать по несущей его прямой, называется *скользящим*. Мы рассматриваем здесь лишь свободные векторы.

Два (ненулевых) вектора *равны*, если они равнонаправлены и имеют один и тот же модуль. При выполнении только одного из указанных двух условий векторы не равны. Два вектора называются *противоположными*, если они противоположно направлены, а модули их равны. Обозначения: $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{a}$.

2. Сложение и вычитание векторов. Чтобы сложить несколько векторов, нужно в конце первого построить вектор, равный второму, в конце второго построить вектор равный третьему и т. д. Вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего, называется *суммой* данных векторов (рис. 65).

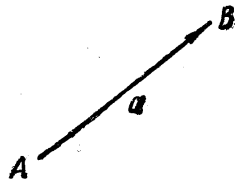


Рис. 64

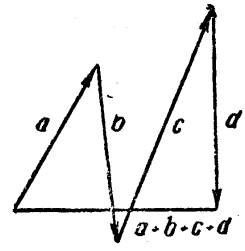


Рис. 65

Пусть a и b — два вектора. Перенесем их в общую точку и построим на этих векторах параллелограмм (рис. 66). Вектор диагонали, проходящий через общую их точку — *сумма векторов* a и b, вектор второй диагонали, направленный к вектору a, — *разность* $a - b$.

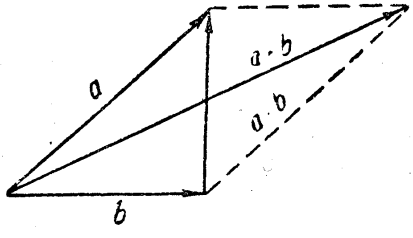


Рис. 66

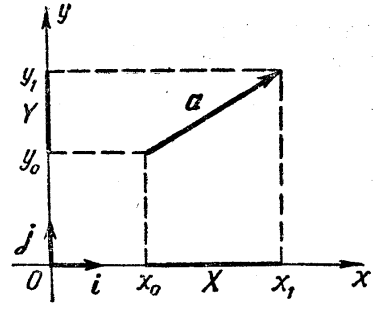


Рис. 67

Сложение и вычитание векторов обладает свойствами переместительности и сочетательности.

3. Проекции вектора на оси координат. *Проекция точки* на ось — основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту ось.

Проекция вектора на ось — отрезок, началом которого является проекция начала вектора на ось, а концом — проекция его конца. Длину проекции (с учетом знака) также называют проекцией вектора.

Вектор может быть задан его проекциями на оси координат (координатами вектора):

$$\boldsymbol{a} = \{X,\ Y\} = \{x_1 - x_0,\ y_1 - y_0\},$$

где $(x_0,\ y_0)$ — координаты начала, а $(x_1,\ y_1)$ — координаты конца данного вектора (рис. 67).

Модуль вектора:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Сумма векторов $\boldsymbol{a} = \{X_1,\ Y_1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{X_2,\ Y_2\}$:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{X_1,\ Y_1\} + \{X_2,\ Y_2\} = \{X_1 + X_2,\ Y_1 + Y_2\}.$$

Разность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{X_1,\ Y_1\} - \{X_2,\ Y_2\} = \{X_1 - X_2,\ Y_1 - Y_2\}.$$

4. Умножение вектора на число. Скалярное произведение двух векторов. В результате умножения вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ получается вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, имеющий то же направление, что вектор $\boldsymbol{a}$, и длину в λ раз большую.

Произведение вектора на число удовлетворяет следующим свойствам:

$$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda;$$
$$(\mu + \lambda)\,\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{a};$$
$$\lambda\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором. Векторы единичной длины, перпендикулярные друг к другу, называются *ортами*. На плоскости два орта $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ определяют прямоугольную систему координат. Каждый вектор $\boldsymbol{a}$ на плоскости может быть выражен через орты в виде

$$\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{i} + \mu\boldsymbol{j},$$

где λ и μ — действительные числа. Это выражение называется *линейной комбинацией* ортов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ („линейной“ потому, что $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ входят в выражение в первой степени). Числа λ и μ являются проекциями X и Y вектора $\boldsymbol{a}$ на оси координат, т. е. $\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$.

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число $\boldsymbol{ab}$, определяемое формулой:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

где $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ обозначает косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Геометрический смысл: скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ равно проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$, умноженной на $|\boldsymbol{b}|$. Если $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2\}$, то

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2.$$

Зная координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы можем найти косинус угла между ними:

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{X_1Y_1 + X_2Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}.$$

Свойства скалярного произведения:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba};$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda\,(\boldsymbol{ab});$$

$$(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{ab} = \lambda\boldsymbol{ab} + \mu\boldsymbol{ab};$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

II. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

А. Основы теории пределов

1. Абсолютная величина числа. *Абсолютной величиной* действительного числа x называется само это число, если оно положительно, или это число, взятое с обратным знаком, если оно отрицательно. Абсолютная величина числа x обозначается так: $|x|$. Данное определение абсолютной величины можно записать в виде формулы

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ при } x < 0; \\ x \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Абсолютная величина алгебраической суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых:

$$|a + b - c| \leqslant |a| + |b| + |c|.$$

Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей:

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|.$$

Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Графики функций $|x|$ и $\frac{|x|}{x}$ приведены соответственно на рис. 68 и 69.

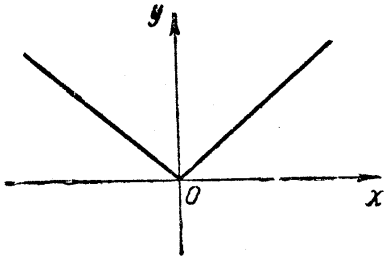


Рис. 68

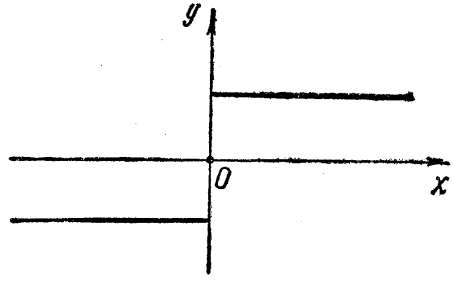


Рис. 69

2. Функция. В высшей математике различают величины постоянные и переменные.

Величина, сохраняющая (в условиях данного вопроса) одно и то же значение, называется *постоянной*. Величина, принимающая (в условиях данного вопроса) различные значения, называется *переменной*.

Величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому из значений, которые может принимать x, соответствует либо одно, либо несколько определенных значений переменной y. В первом случае функция называется *однозначной*, во втором — *многозначной*.

Зависимость, связывающая независимую переменную величину x (*аргумент*) с функцией, называется *функциональной зависимостью*.

Примеры. Путь s, пройденный автомобилем за время t, есть функция скорости v. Интенсивность распада радиоактивного вещества данной массы есть функция времени. Площадь круга — функция радиуса.

Скорость размножения бактерий — функция их количества.

На практике не всегда возможно выделить одну переменную, от которой только и зависит функция, а часто это бывает просто бесполезным. Поэтому вводятся в рассмотрение функции нескольких переменных.

Примеры. Мощность тока — функция силы тока и напряжения. Скорость автомобиля — функция мощности его мотора, веса силы трения о грунт, лобового сопротивления воздуха и т. д.

Мы ограничимся рассмотрением функций одной переменной.

Способы задания функции. *Аналитический способ* — это способ задания функции формулами, математическими символами, которые представляют собой удобную запись известных нам математических операций: сложение, вычитание, деление, отыскание тригонометрических функций, возведение в степень и т. д. По мере развития наших знаний к этим операциям присоединяются новые.

Аналитический способ задания функции не является единственным. Часты случаи, когда невозможно найти аналитическое выражение для функции.

На практике, когда зависимости между функциями определяются опытным путем, распространены табличный и графический способы задания функций.

Табличный способ применяется и в тех случаях, когда непосредственное вычисление значения функции по ее аналитическому выражению требует большой затраты времени.

Графический способ задания функции нашел широкое применение в различных самопишущих технических приборах.

Обозначение функции: $y=f(x)$, $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$ и т. д. Здесь x — аргумент, y — функция, f, F, φ — различные символы функциональной зависимости.

Частное значение функции $y=f(x)$, соответствующее заданному значению $x=a$ независимой переменной, обозначается так: $f(a)$. Например, если

$$f(x)=x^2+\sqrt{3x+10},$$

то

$$f(2)=2^2+\sqrt{3\cdot 2+10}=8.$$

Функция $y = f(x)$ может быть геометрически изображена в виде некоторой кривой линии, называемой *графиком функции*, если значения аргумента x и функции y рассматривать как координаты точки на плоскости.

Область определения функции. Совокупность значений аргумента x, для которых функция y определена, называется *областью определения функции* y.

Наиболее часто встречающиеся области определения функции — это один или несколько открытых или замкнутых интервалов.

Открытым интервалом называется совокупность всех действительных значений x, заключенных между двумя значениями $x = a$ и $x = b$, исключая сами эти значения a и b (рис. 70, *а*). Обозначение: $a < x < b$ или (a, b). Значения a и b называются *концами* интервала.

Если к открытому интервалу присоединим его концы a и b, то получим *замкнутый интервал* (рис. 70, *б*). Обозначение: $a \leqslant x \leqslant b$ или $[a, b]$.

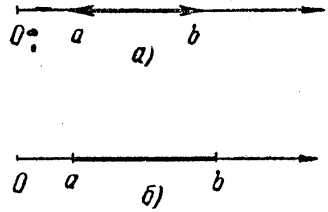


Рис. 70

Если к открытому интервалу присоединим один из его концов (левый или правый), то получим *полуоткрытый интервал*. Обозначения: $[a, b)$ или $(a, b]$.

Зная аналитическое представление функции и свойства тех операций, которые его составляют, мы можем исследовать нашу функцию, в частности, найти ее область определения.

Примеры.

$\sqrt{x^2 - 1}$, область определения: $x \leqslant -1$, $x \geqslant 1$ ($x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ положительно)

$\frac{1}{\ln x}$, » » $x > 0$, $x \neq 1$ (x положителен, $\ln x \neq 0$)

$\ln(x^2 - 2x + 7)$, » » вся ось: $-\infty < x < +\infty$ ($x^2 - 2x + 7$ положительно всегда)

$\ln \arcsin x$, область определения: $0 < x < 1$ (функция $\arcsin x$ требует изменения x в интервале $[-1, 1]$, а $\ln \arcsin x$ — положительности $\arcsin x$)

Существенно помнить, что если функция получена в результате исследования некоторого конкретного процесса, то надо исходить из условий, при которых этот процесс протекает, а не ограничиваться формальными подсчетами.

Пример. Исследуя зависимость линейного расширения алюминия от температуры, пользуются приближенной формулой: $l = [\alpha (t - t_0) + 1] l_0$. Однако бессмысленно рассматривать значения $t > 658°$, так как при 658° алюминий плавится и говорить о его линейном расширении нельзя.

Окрестностью точки $x = x_0$ называется всякий интервал, для которого точка x_0 является внутренней.

Если областью определения функции являются все действительные числа, то говорят, что функция определена на всей числовой оси или в интервале „от минус бесконечности до плюс бесконечности". Обозначение: $-\infty < x < +\infty$ или $(-\infty, +\infty)$.

Классификация функций. Функция, заданная формулой (уравнением), называется *явной,* если данное уравнение разрешено относительно функции. Пример явной функции: $y = x^2 - \sqrt{1 - x}$.

Функция называется *неявной,* если задающее ее уравнение не разрешено относительно функции. Пример неявной функции:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Элементарными называются функции, определенные формулами, содержащими конечное число алгебраических или тригонометрических операций, производимых над аргументом, функцией и некоторыми постоянными.

Элементарные функции делятся в основном на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических

операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, решение алгебраического уравнения).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*.

Простейшие типы алгебраических функций:

1. *Целая функция* (*многочлен* или *полином*): $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, над аргументом x производятся только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в целую положительную степень.

Примеры целых функций: $y = a$ (*постоянная*), $y = ax + b$ (*линейная функция*), $y = ax^2 + bx + c$ (*квадратичная функция*). Частным случаем линейной функции при $b = 0$ является функция $y = ax$, выражающая прямую пропорциональную зависимость (см. стр. 202) между переменными величинами x и y. График прямой пропорциональности есть прямая линия, проходящая через начало координат и образующая с осью Ox угол α, тангенс которого равен коэффициенту пропорциональности a (см. рис. 47 на стр. 202).

2. *Дробная* (*рациональная*) *функция*: над аргументом x производится еще действие деления. Наиболее простым примером дробной функции является функция $y = \frac{m}{x}$, выражающая обратную пропорциональную зависимость между переменными величинами x и y. График обратной пропорциональности см. на стр. 217 (рис. 58).

3. *Иррациональная функция*: над аргументом x производится еще извлечение корня.

Простейшие типы трансцендентных функций.

1. *Показательная функция* $y = a^x$. На рис. 71 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$; они симметричны относительно оси Oy.

2. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$. На рис. 72 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{1/2} x$.

3. *Тригонометрические функции:* $y = \sin x$ (рис. 73), $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 74), $y = \sec x$ (рис. 75), $y = \cos x$ (рис. 76), $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 77), $y = \operatorname{cosec} x$ (рис. 78).

4. *Обратные тригонометрические функции:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$, $y = \operatorname{arc\,sec} x$, $y = \operatorname{arc\,cosec} x$.

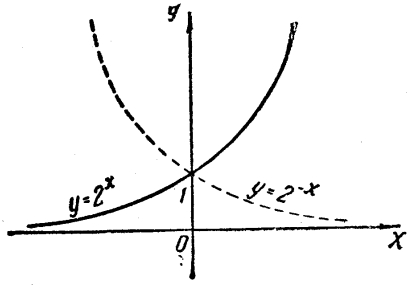


Рис. 71

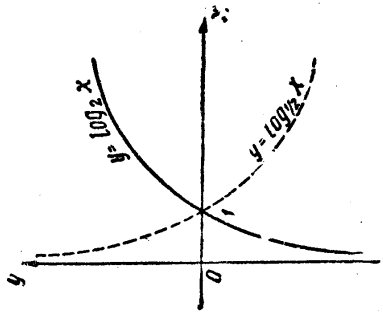


Рис. 72

На рис. 79 изображен график функции $y = \operatorname{Arc\,sin} x$; сплошной линией выделен график функции $y = \arcsin x$ (главные значения). На рис. 80 изображен график функции $y = \operatorname{Arc\,cos} x$; сплошной линией выделен график функции $y = \arccos x$ (главные значения). На рис. 81 и 82 изображены соответственно графики функций $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ и $y = \operatorname{Arc\,ctg} x$, а на рис. 83 и 84 — соответственно графики функций $y = \operatorname{Arc\,sec} x$ и $y = \operatorname{Arc\,cosec} x$; сплошными линиями выделены главные значения соответствующих функций.

Взаимно обратные функции. Для характеристики функции совершенно не существенно, какой буквой обозначается сама функция и ее аргумент. Например, $y = x^2$ и $u = v^2$ это одна и та же функциональная зависимость. Если в данной функциональной зависимости мы поменяем ролями аргумент и функцию, то получим функцию, *обратную* данной.

Пример 1. Пусть задана функция $u = v^3$. Если поменять ролями аргумент и функцию, то v будет функцией u и изобразится формулой $v = \sqrt[3]{u}$.

Обозначая в обоих случаях аргумент буквой x, а функцию буквой y, получим две взаимно обратные функции:

$$y = x^3 \text{ и } y = \sqrt[3]{x}.$$

Взаимно обратной является также, например, следующая пара функций:

$$y = a^x \text{ и } y = \log_a x.$$

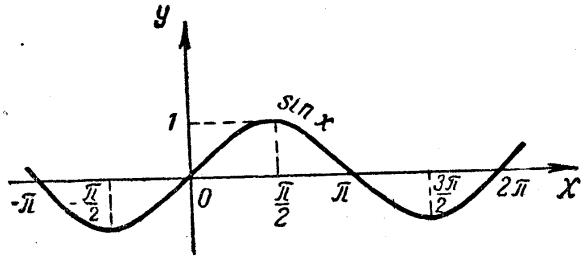


Рис. 73

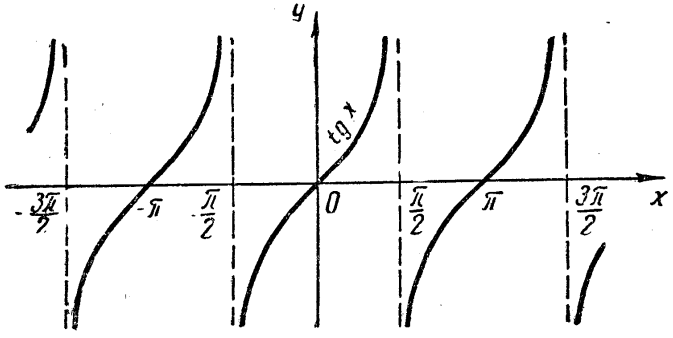


Рис. 74

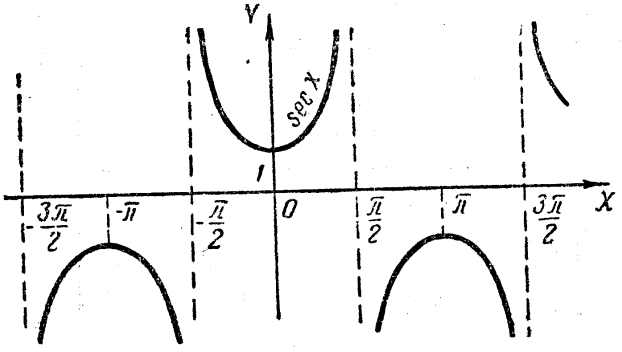


Рис. 75

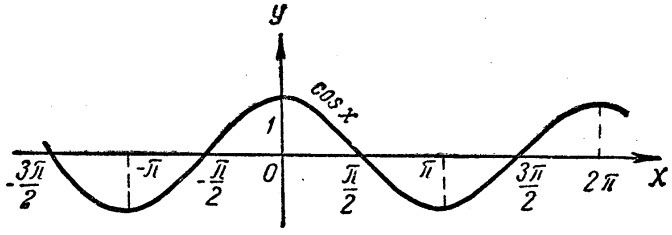


Рис. 76

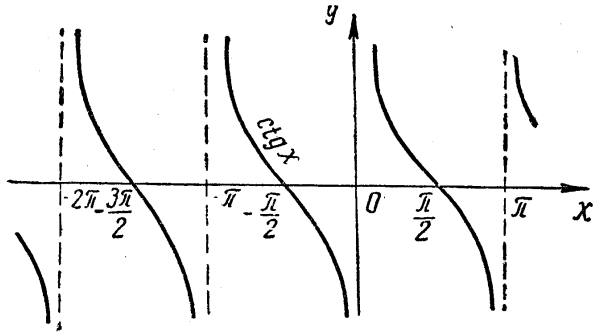


Рис. 77

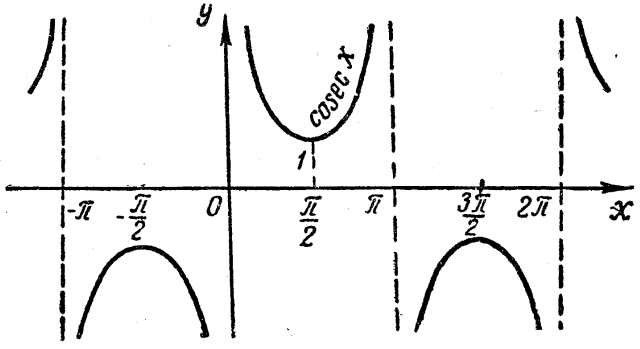


Рис. 78

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Некоторые типы функций. Функция называется *возрастающей* в некотором интервале, если для

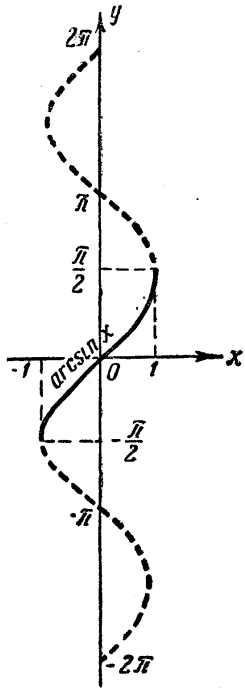


Рис. 79

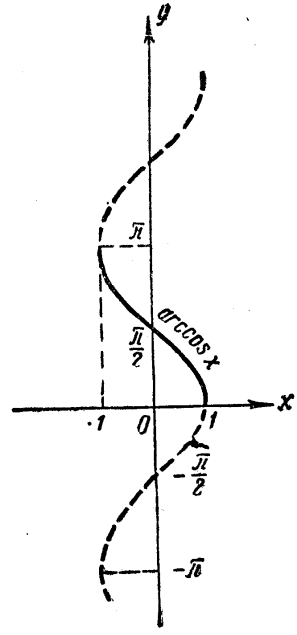


Рис. 80

любых двух значений x_1, x_2 аргумента из этого интервала значения функции удовлетворяют условию

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Функция называется *убывающей* в некотором интервале, если

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Функция либо только возрастающая, либо только убывающая называется *монотонной*.

Разность между двумя значениями x_1 и x_2 независимой переменной x называется *приращением независи-*

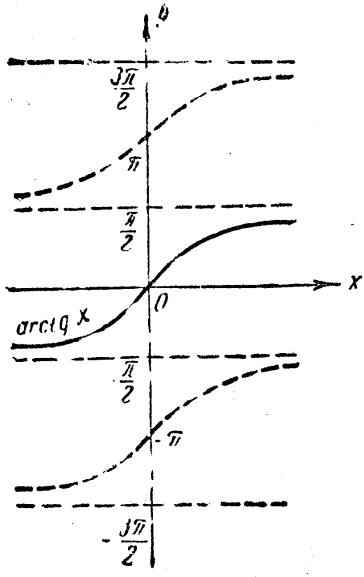


Рис. 81

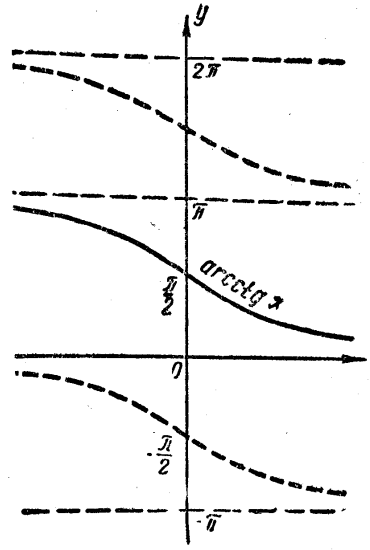


Рис. 82

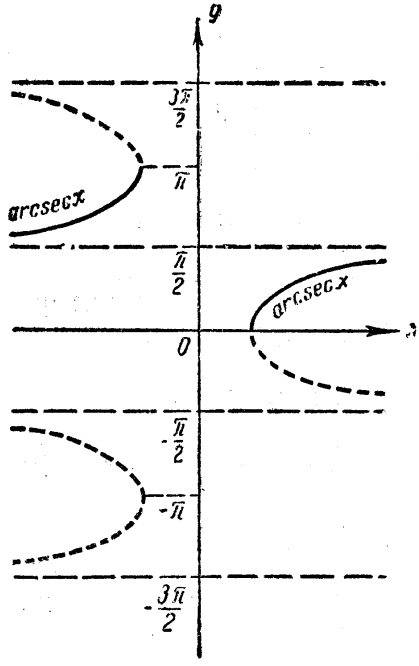


Рис. 83

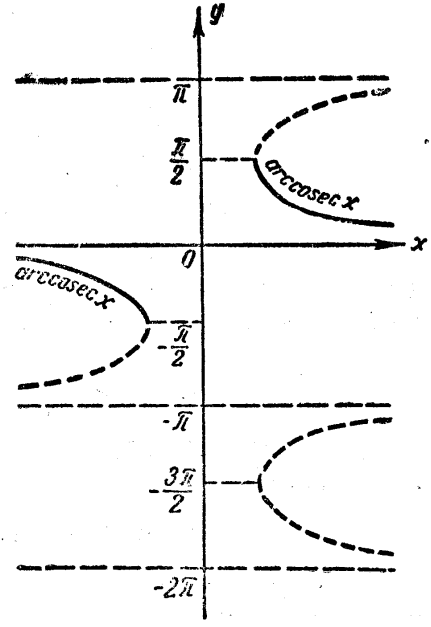


Рис. 84

симой переменной и обозначается символом Δx (читается: „дельта икс"):

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Отсюда $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Если величины y_1 и y_2 суть значения функции $y = f(x)$, соответствующие значениям x_1 и x_2 независимой переменной x,

$$y_1 = f(x_1) \text{ и } y_2 = f(x_2),$$

то разность $y_2 - y_1$ (рис. 85) называется *приращением функции* соответствующим приращению Δx независимой переменной, и обозначается символом Δy:

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

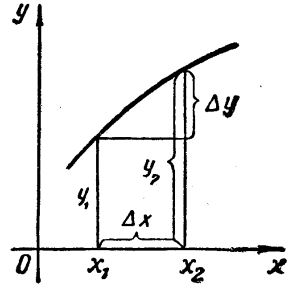


Рис. 85

Величины Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными.

Чтобы вычислить приращение Δy функции $y = f(x)$, надо в выражении функциональной зависимости заменить x на $x + \Delta x$, а y — на $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

и затем вычесть выражение $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* $v_{ср}$ *изменения функции* на интервале $(x, x + \Delta x)$

Четной называется функция, удовлетворяющая условию $f(-x) = f(x)$, если x и $-x$ принадлежат области определения функции $f(x)$. Примеры четной функции: $y = x^2 + 4$, $y = \cos x$. График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Нечетной называется функция, удовлетворяющая условию $f(-x) = -f(x)$, если x и $-x$ принадлежат области определения функции $f(x)$. Примеры нечетной функции: $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^3 - x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Периодической называется функция, удовлетворяющая условию: $f(x+T)=f(x)$. Наименьшее значение T, удовлетворяющее этому условию, называется *периодом функции*. Примеры периодических функций: 1) $y=\sin x$; ее период $T=2\pi$, так как $\sin(x+2\pi)=\sin x$; 2) $y=\operatorname{tg} x$; ее период $T=\pi$, так как $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если существует такая постоянная величина A, что $|f(x)|<A$ при любом значении x. В противном случае функция $f(x)$ называется *неограниченной*.

Примеры. Функция $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ ограниченная, так как при любых значениях x имеем $\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$. Функция $y=\sin x$ ограниченная, так как для любых значений x имеем $|\sin x|\leqslant 1$. Функция $y=\operatorname{tg} x$ ограничена на интервале $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, и не ограничена на интервале $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины. Переменная величина α называется *бесконечно малой*, если она при своем изменении становится и в дальнейшем остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа ε:

$$|\alpha|<\varepsilon.$$

Переменная величина y называется *бесконечно большой*, если при своем изменении она становится и в дальнейшем остается по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа N:

$$|y|>N.$$

Простейшие свойства бесконечно малых.

1. Алгебраическая сумма любого (но постоянного) числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

3. Произведение постоянной величины на бесконечно малую, или произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

4. Произведение любого постоянного числа сомножителей, среди которых хотя бы один есть величина бесконечно малая, а остальные — величины ограниченные (или постоянные), есть величина бесконечно малая.

5. Частное $\frac{\alpha}{a}$ (где α — бесконечно малая, $a \neq 0$ — конечная величина) есть величина бесконечно малая.

6. Частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых величин в зависимости от характера изменения делимого и делителя может быть или бесконечно малой, или конечной, или бесконечно большой величиной.

Если частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая $\left(\text{это значит, что } \lim \frac{\alpha}{\beta} = 0\right)$, то α называют *бесконечно малой высшего порядка, чем* β, и символически записывают:

$$\alpha = o(\beta).$$

Если частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых есть конечная величина, отличная от нуля $\left(\text{это значит, что } \lim \frac{\alpha}{\beta} = a \neq 0\right)$, то α и β называют *бесконечно малыми одного и того же порядка* и символически записывают:

$$\alpha = O(\beta).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\alpha = O(\beta)$, то $\beta = O(\alpha)$.

Если же частное $\frac{\alpha}{\beta}$ двух бесконечно малых есть величина бесконечно большая, то α называют *бесконечно малой низшего порядка, чем* β. В этом случае можно написать:

$$\beta = o(\alpha).$$

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то целый порядок бесконечно малой α по сравнению с бесконечно малой β устанавливается так: находят последовательно пределы $\lim \frac{\alpha}{\beta^2}$, $\lim \frac{\alpha}{\beta^3}$ и т. д., и если не обнаружится, что при каком-нибудь целом k предел $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = c$ отличен от нуля, то говорят, что *величина* α *имеет* k*-й порядок малости относительно бесконечно малой* β.

Главной частью бесконечно малой величины называется бесконечно малая, отличающаяся от данной на бесконечно малую *более высокого* порядка.

7. Бесконечно малые величины α и β одного и того же порядка называются *равносильными* или *эквивалентными*, если предел их отношения равен единице:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Разность двух эквивалентных бесконечно малых α и β есть обязательно бесконечно малая высшего порядка, чем α и β; поэтому каждая из двух эквивалентных бесконечно малых есть главная часть другой.

Связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами. 1. Если α — величина бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ — величина бесконечно большая. 2. Если y — величина бесконечно большая, то $\frac{1}{y}$ — величина бесконечно малая.

4. Предел функции. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$, при x, стремящемся к a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

если разность $f(x) - A = \alpha$ является бесконечно малой величиной при приближении x к a.

Если функция $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, имеет своим пределом число A, то $f(x)$ может быть представлена в виде суммы

$$f(x) = A + \alpha,$$

где α — величина бесконечно малая при $x \to a$.

Предел бесконечно малой величины равен нулю.

Для обозначения того факта, что функция $f(x)$ при приближении x к a неограниченно возрастает, употребляют обычно такую запись: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Если при x, стремящемся к a, функция $f(x)$ неограниченно убывает, то пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Запись $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ означает, что при неограниченно возрастающем аргументе x функция $f(x)$ стремится к пределу A.

Аналогичный смысл имеет запись $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Простейшие теоремы о пределах*.

1. Предел постоянной величины c равен самой постоянной c:

$$\lim c = c.$$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] =$$
$$= \lim f_1(x) + \lim f_2(x) - \lim f_3(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов:

$$\lim [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)] =$$
$$= \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \cdot \lim f_3(x).$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim cf(x) = c \lim f(x)$.

5. $\lim (x^m) = (\lim x)^m$; $\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}$.

6. Предел частного двух функций равен частному их пределов, если только предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}, \text{ если } \lim f_2(x) \neq 0.$$

---

* Здесь всюду предполагается существование пределов у всех функций, участвующих в формулировках теорем.

7. Если функция $f(x)$ заключена между двумя другими функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$

$$f_1(x) < f(x) < f_2(x),$$

имеющими один и тот же общий предел A,

$$\lim f_1(x) = A, \ \lim f_2(x) = A,$$

то функция $f(x)$ имеет тот же предел A:

$$\lim f(x) = A.$$

Некоторые замечательные пределы.

1. *Числом e* называется следующий предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

или

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e.$$

Число e есть число трансцендентное. Приближенное его значение:

$$e \approx 2{,}71828.$$

2. $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

3. Имеют место следующие сообщения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Таким образом, переменные величины x и $\sin x$ (а также $\operatorname{tg} x$) при $x \to 0$ представляют собой пример эквивалентных (см. стр. 244) бесконечно малых.

4. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0,$$

где m — любое число.

5. $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

6. $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1,$$

где $a > 0$ и постоянная.

Натуральные логарифмы. Система логарифмов, в которой за основание принято число e, называется системой *натуральных* или *неперовых логарифмов*. Обозначение натуральных логарифмов:

$$\log_e N = \ln N.$$

Множитель $\lg e$ (десятичный логарифм числа e), служащий для перехода от натуральной системы логарифмов к десятичной, называется *модулем перехода*:

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343;$$

$$\ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}3026.$$

Переход от натуральных логарифмов к десятичным и обратно:

$$\lg N \approx 0{,}4343 \cdot \ln N;$$

$$\ln N \approx 2{,}3026 \cdot \lg N.$$

5. Непрерывность функции. Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1 (или *при* $x = x_1$), если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел приращения Δy функции, соответствующий приращению Δx аргумента, равен нулю при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)] = 0.$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 3. *Функция* $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_1, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_1$ равен значению функции при $x = x_1$, т. е. если

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке интервала (a, b) или $[a, b]$, называется *непрерывной на заданном интервале.*

Если в некоторой точке x_0 какое-нибудь из условий непрерывности функции $y=f(x)$ не выполняется, то говорят, что *функция* $y=f(x)$ *претерпевает разрыв в точке* x_0 и точку x_0 называют *точкой разрыва* функции.

Непрерывность и точки разрыва элементарных функций.

Целые функции (*многочлены*) непрерывны при всех значениях x.

Дробные функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывны при всех значениях x, за исключением тех, которые обращают в нуль знаменатель $Q(x)$.

Иррациональные функции. Радикалы с целым положительным показателем из целых функций непрерывны при всех значениях x, принадлежащих к области определения (см. стр. 233). Радикалы из дробных функций имеют те же точки разрыва, что и подкоренная функция.

Тригонометрические функции. Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при всех значениях x. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ имеют точки разрыва при $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$; функции $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ разрывны при $x=n\pi$ (n — целое число).

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,ctg} x$ непрерывны при всех значениях x; функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ непрерывны при всех значениях x, принадлежащих к области определения этих функций ($-1 \leqslant x \leqslant 1$).

Показательные функции e^x и a^x ($a>0$) непрерывны при всех значениях x.

Логарифмическая функция $\log_a x$ ($a>0$) непрерывна при всех $x>0$ и уходит в $-\infty$ при $x=0$.

Б. Основы дифференциального исчисления

1. Производная. Определение. *Производной* функции $y=f(x)$ называется такая новая функция $\left(\text{ее различные обозначения: } y';\ \frac{dy}{dx};\ f'(x);\ \dot{y};\ \frac{df(x)}{dx}\right)$, которая при каждом значении независимой переменной x равна пределу отношения приращения Δy функ-

ции к приращению Δx независимой переменной x при произвольном стремлении Δx к нулю. Запись:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ или}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Процесс вычисления производной от данной функции называется *дифференцированием* функции.

Геометрический смысл производной. Значение производной $y' = f'(x)$ при заданном значении x_0 равно тангенсу угла, отсчитываемого от оси Ox до касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 86):

$$y'_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

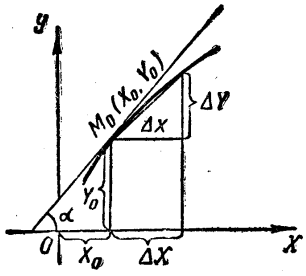


Рис. 86

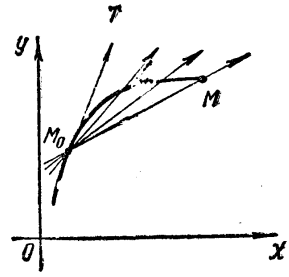


Рис. 87

Касательной к кривой в точке M_0 (рис. 87) называется предельное положение M_0T секущей M_0M, когда точка M, перемещаясь вдоль кривой, стремится к совпадению с M_0.

Нормалью к кривой в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной к кривой в этой точке.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ — значение производной от функции $y = f(x)$ при $x = x_0$.

Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0.$$

Механический и физический смысл производной. При помощи понятия производной легко определяются многие понятия математики и естествознания. Так, например:

1. *Мгновенная скорость неравномерного движения* есть производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t, т. е., если $s=f(t)$, то $v=f'(t)$.

Замечание. По аналогии со скоростью движения говорят вообще о скорости изменения функции. Если величина y есть функция величины x, т. е. $y=f(x)$, то производную y' называют *скоростью изменения величины* y *относительно величины* x.

2. *Угловая скорость* вращения тела около оси есть производная от функции, выражающей зависимость угла φ поворота тела относительно оси от времени.

3. *Линейная плотность* материальной линии (например, проволоки) в данной ее точке есть производная от функции, выражающей зависимость массы этой линии от ее длины.

4. *Теплоемкость* тела при данной температуре есть производная от функции, выражающей зависимость количества тепла от температуры.

5. *Скорость химической реакции* есть производная от функции, выражающей зависимость количества вступившего в реакцию вещества от времени.

6. *Сила тока* есть производная от функции, выражающей количество протекшего электричества от времени.

Связь между существованием производной и непрерывностью функции. Если функция $y=f(x)$ имеет производную при $x=x_0$, то она непрерывна при этом значении x_0.

Обратное предложение оказывается неверным: функция, непрерывная в данной точке, может не иметь производной в этой точке.

Второй производной функции $y=f(x)$, или *производной второго порядка*, называется производная от ее производной. Обозначения второй производной:

y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются производные любого порядка. Обозначения производной n-го порядка:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Механический смысл второй производной. Ускорение a прямолинейного движения тела в данный момент времени есть вторая производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t, т. е. если $s = f(t)$, то $a = s''$.

2. Основные правила и формулы дифференцирования

Таблица основных формул дифференцирования

№ п. п.	Функция	Производная	№ п. п.	Функция	Производная
1	C (постоянная)	0	6	$\sin x$	$\cos x$
2	x^m (m—постоянная)	mx^{m-1}	7	$\cos x$	$-\sin x$
	Частные случаи:		8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	x	1	9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$			
3	a^x (a—постоянная)	$a^x \ln a$			
4	e^x	e^x	11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	12	$\operatorname{arc tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
			13	$\operatorname{arc ctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$			
	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$			

Правила дифференцирования (u, v, w — функции аргумента x, по которому производится дифференцирование).

1. *Производная алгебраической суммы*

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'.$$

2. *Производная произведения*

$$(uv)'=vu'+uv';\ (uvw)'=vwu'+wuv'+uvw'.$$

В частности, если C — постоянная, то

$$(Cu)'=Cu';\ \left(\frac{u}{C}\right)'=\left(\frac{1}{C}u\right)'=\frac{1}{C}u'.$$

3. *Производная частного (дроби)*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2};\ (v\neq 0).$$

В частности,

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2}.$$

4. *Производная сложной функции (функции от функции).* Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, т. е. $y=f[\varphi(x)]$, то

$$y'=f'(u)\cdot\varphi'(x)\ \text{или}\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

В более общем случае, если $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\ (\textit{цепное правило}).$$

Пример. $y=\operatorname{tg}^3 4x$. Здесь $y=u^3$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=4x$. Имеем

$$\frac{dy}{du}=3u^2=3\operatorname{tg}^2 4x,$$

$$\frac{du}{dv}=\frac{1}{\cos^2 v}=\frac{1}{\cos^2 4x},\quad \frac{dv}{dx}=4.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} =$$

$$= 3 \operatorname{tg}^2 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4 = \frac{12 \operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}.$$

Производные некоторых сложных функций. Если u — функция от x, и a — постоянная, то

$$(u^a)' = au^{a-1} u', \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u',$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},$$

$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u},$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

5. *Логарифмическое дифференцирование.* Часто для вычисления производной функции $y = f(x)$ эту функцию сначала логарифмируют, а затем дифференцируют. Результат логарифмического дифференцирования функции, т. е. выражение

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

называют *логарифмической производной* от функции y.

Пример. *Производная общей показательной функции* $y = u^v$ (u и v — функции от x). Взяв логарифм натуральный от левой и правой части равенства $y = u^v$, получим

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируем левую и правую части полученного равенства по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}.$$

Отсюда

$$y' = \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) y = \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) u^v =$$

$$= u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

6. *Производная неявной функции.* Если функция y задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то для вычисления производной y' дифференцируем по x обе части уравнения, считая y функцией от x, и полученное в результате уравнение разрешаем относительно y'.

Пример. Найти y', если функция y задана неявно уравнением

$$xy^3 - 5x + 3y - 4 = 0.$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы, произведения, сложной функции и формулами дифференцирования, получим:

$$1 \cdot y^3 + 3y^2 y' x - 5 + 3y' = 0,$$

откуда находим y':

$$y' = \frac{5 - y^3}{3y^2 x + 3}.$$

7. *Производная обратной функции.* Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ взаимно обратны, то

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Производные n-го порядка от некоторых функций

№ п.п.	Функция	Производная n-го порядка
1	x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$
2	a^x	$(\ln a)^n a^x$
3	e^{kx}	$k^n e^{kx}$
4	$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
5	$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
6	$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

3. Исследование функций с помощью производной

Возрастание и убывание функции (достаточный признак). Если производная данной функции существует и положительна (отрицательна) для всех значений x в интервале (a, b), то функция в этом интервале возрастает (соответственно убывает).

Максимумы и минимумы функции. Точка $x = x_0$ называется *точкой* (относительного) *максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Точка $x = x_0$ называется *точкой* (относительного) *минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Для максимума и минимума функции а также для ее крайних точек, существует общее название — *экстремум.*

Необходимый признак существования максимума или минимума функции. В точках максимума или минимума функции $y = f(x)$ ее производная $f'(x)$ (если она существует в этих точках) обращается в нуль:

$$f'(x) = 0.$$

Геометрический смысл. В точках максимума (рис. 88) или минимума (рис. 89) касательная к графику функции параллельна оси Ox.

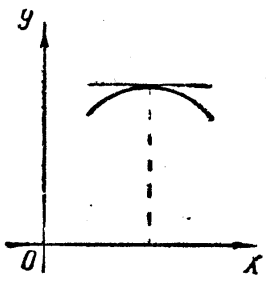


Рис. 88

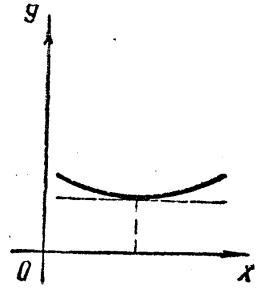


Рис. 89

Замечание 1. Не при всяком значении x_0, для которого производная $f'(x)$ равна нулю $[f'(x_0) = 0]$, функция $f(x)$ имеет максимум или минимум.

Замечание 2. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум и в точках разрыва своей производной $f'(x)$.

Корни уравнения $f'(x) = 0$ называются *стационарными точками.*

Отыскание точек максимума или минимума. Для отыскания точек (относительных) максимума и минимума переменной величины поступают так:

1. Выразив сообразно условию задачи данную переменную величину как функцию независимой переменной, находят производную этой функции (пусть (a, b) — область определения этой функции).

2. Приравнивают производную нулю, решают полученное уравнение $f'(x) = 0$ и находят его корни (стационарные точки). Кроме них находят еще и точки разрыва производной $f'(x)$.

3. Каждую из стационарных точек, а также точек разрыва производной, исследуют на максимум и минимум одним из следующих двух способов.

Первый способ. Допустим, что $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — корни уравнения $f'(x) = 0$. В таком случае определяем знаки производной $f'(x)$ в каждом из интервалов (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_k, b)*. Тем самым будет выяснено, изменяет ли и как именно производная знак при переходе (слева направо) через каждую из точек $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Если при переходе, например, через точку c_1 производная меняет знак с „−“ на „+“, то в точке c_1 функция имеет минимум, если с „+“ на „−“, — то максимум. Если же знак производной при переходе, например, через точку c_2 не меняется, то в этой точке функция не имеет экстремума.

Второй способ. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — корни уравнения $f'(x) = 0$. Находим вторую производную $f''(x)$ и определяем знак второй производной при каждом из значений $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Если, например, в точке c_1

$$f''(c_1) < 0,$$

то в этой точке функция имеет максимум; если, например, в точке c_2

$$f''(c_2) > 0,$$

то в этой точке функция имеет минимум; если же, например, в точке c_3

$$f''(c_3) = 0,$$

то ничего определенного сказать нельзя. В последнем случае следует обратиться к первому способу отыскания экстремума функции.

Наибольшие и наименьшие значения функции на интервале. Для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции на интервале (a, b) надо найти все максимумы (минимумы) этой функции на данном интервале и значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах интервала. Наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на интервале (a, b).

Выпуклость и вогнутость графика функции. Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой (вогнутой) кверху*, если ее произвольная дуга лежит

---

* Для определения знака производной, например, в интервале (c_1, c_2) достаточно определить знак производной в какой-нибудь одной точке этого интервала.

над (*под*) хордой, стягивающей эту дугу. На рис. 90 дуга AC выпукла кверху, а дуга CB вогнута кверху. Выпуклая дуга лежит *под* любой своей касательной, а вогнутая — *над* любой своей касательной.

Достаточный признак выпуклости и вогнутости функции. Если вторая производная $f''(x)$ данной функции $f(x)$ положительна ($f''(x) > 0$) в интервале (a, b), то функция в этом интервале вогнута кверху; если же в интервале (a, b) $f''(x) < 0$ (отрицательна), то функция выпукла кверху.

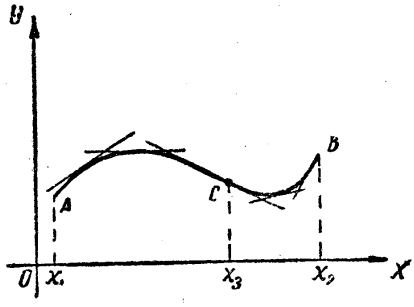


Рис. 90

Точки перегиба. Точка, в которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую (например, точка C на рис. 90), называется точкой перегиба. Точка перегиба отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой ее части.

Необходимый признак существования точки перегиба. В точках перегиба графика функции $y = f(x)$ ее вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль:

$$f''(x) = 0.$$

Геометрический смысл. В любой окрестности точки перегиба кривая лежит по обе стороны от касательной (рис. 90).

Замечание. Однако *не при всяком* значении x_0, для которого вторая производная обращается в нуль ($f''(x_0) = 0$), функция $f(x)$ имеет точку перегиба.

Отыскание точек перегиба. Для отыскания точек перегиба графика функции $y = f(x)$ необходимо:

1) вычислить вторую производную $f''(x)$ данной функции;

2) найти те значения x в интервале (a, b), при которых $f''(x)$ обращается в нуль (т. е. решить уравнение $f''(x) = 0$); пусть эти значения будут: $x_1, x_2, \ldots, x_k$;

3) определить знак второй производной $f''(x)$ в каждом из интервалов (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_k, b). (См. подстрочное примечание на стр. 257). Тем самым будет выяснено, изменяет ли вторая производная $f''(x)$ знак при переходе через каждую из точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Изменение знака $f''(x)$, например, в точке x_1 указывает, что при $x = x_1$ функция имеет точку перегиба. Если знак $f''(x)$ не изменяется, например, при переходе через точку x_2, то при $x = x_2$ функция не имеет точки перегиба;

4) если при $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет точку перегиба, то, определив значение функции в этой точке $f(x_1)$, мы найдем координаты точки перегиба $(x_1, f(x_1))$.

Схема построения графика функции состоит из следующих пунктов, в которых находят:

1) область определения функции (стр. 233), точки разрыва (стр. 248), точки пересечения с осями координат, оси и центры симметрии графика (четность, нечетность и периодичность функции; см. стр. 241—242);

2) точки максимума и минимума функции, участки возрастания и убывания функции;

3) значения x, при которых график функции имеет точки перегиба, участки выпуклости и вогнутости функции;

4) координаты „опорных" точек графика функции, вычисляя значения самой функции $f(x)$, отвечающие всем найденным значениям x.

Наносят на чертеж все найденные точки и, принимая во внимание все результаты исследования, вычерчивают график данной функции.

Преобразования графиков. Зная график функции $y = f(x)$, можно построить графики $y = af(bx + c)$. При этом второй график получается из первого растяжением в a раз вдоль оси Oy, в b раз вдоль оси Ox и переносом графика на c вправо при $c > 0$ и влево при $c < 0$. На рис. 91 изображено последовательное построение графика $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ из графика $y = \sin x$.

Кривизна кривой и радиус кривизны. Круг и центр кривизны. *Средней кривизной* $K_{ср}$ дуги MM_1 называется отношение угла $\Delta\varphi$ между касательными, проведенными в точках M и M_1 дуги („угла смежности"), к длине Δs этой дуги (рис. 92):

$$K_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Средняя кривизна характеризует степень искривленности дуги в целом.

Кривизной K кривой в точке M называется предел средней кривизны $K_{ср}$ дуги MM_1, когда длина дуги MM_1 стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} K_{ср} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

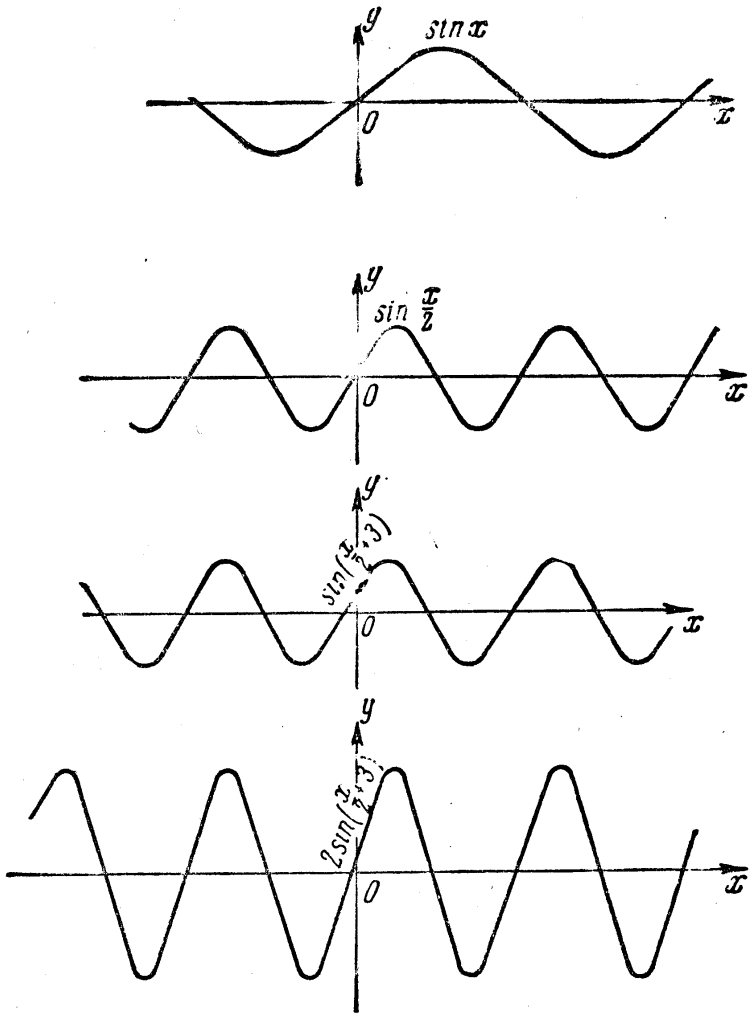


Рис. 91

Радиусом кривизны R в точке M кривой называется величина, обратная кривизне:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Для *окружности* радиуса a кривизна и радиус кривизны постоянны, причем

$$K = \frac{1}{a}, \quad R = a.$$

Для *прямой* линии:

$$K = 0, \quad R = \infty.$$

Для прочих кривых значения кривизны и радиуса кривизны меняются от точки к точке.

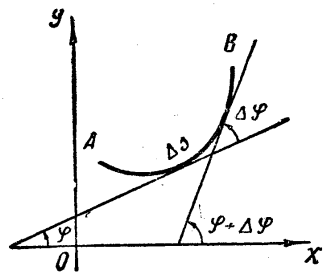


Рис. 92

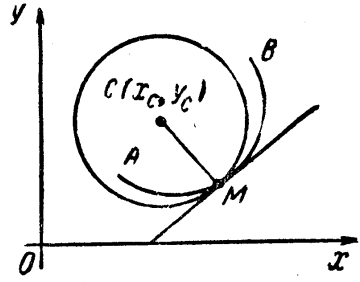


Рис. 93

Проведем в точке M (рис. 93) нормаль к кривой и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MC, равный по величине радиусу кривизны R. Полученная при этом точка $C(x_C, y_C)$ называется *центром кривизны*, а круг с центром C и радиусом CM называется *кругом кривизны*. Круг кривизны дает наглядное представление о степени искривления кривой в данной точке.

Формулы для кривизны K, радиуса кривизны R и координат центра кривизны x_C, y_C. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''};$$

$$x_C = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

4. Дифференциал. Бесконечно малое приращение Δy функции $y = f(x)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых (если $f'(x) \neq 0$):

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \qquad (1)$$

где $f'(x)$ — производная от данной функции; $\alpha\Delta x$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx и Δy.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ этой суммы, являясь, следовательно, главной частью приращения функции, пропорциональной приращению независимой переменной Δx, называется *дифференциалом функции* $f(x)$ и обозначается dy или $df(x)$. Итак,

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (2)$$

Частный случай. Дифференциал линейной функции равен приращению этой функции.

Дифференциалом dx *независимой переменной* x называют само приращение Δx независимой переменной

$$dx = \Delta x.$$

Теперь равенство (2) можно переписать так:

$$dy = f'(x)dx \text{ или } f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'. \qquad (3)$$

Таким образом, производную $f'(x)$ функции $f(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала dy функции к дифференциалу dx аргумента.

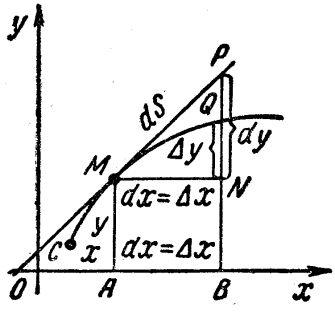


Рис. 94

Зная производную функции, легко найти ее дифференциал и обратно (см. формулы (3)). Поэтому действия отыскания производной и дифференциала данной функции носят общее название: *дифференцирование.*

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал dy функции $y = f(x)$ представляет собой приращение ординаты касательной, проведенной в данной точке M графика функции. На рис. 94:

$$dx = \Delta x = MN;\ \Delta y = NQ;\ dy = NP.$$

Правила вычисления дифференциалов.

1. *Дифференциал алгебраической суммы*

$$d(u+v-w)=du+dv-dw.$$

2. *Дифференциал произведения*

$$d(uv)=vdu+udv.$$

В частности, если C — постоянная, то

$$d(Cu)=Cdu,\ d\left(\frac{u}{C}\right)=\frac{du}{C}.$$

3. *Дифференциал частного (дроби)*

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\ (v\neq 0).$$

В частности,

$$d\left(\frac{C}{u}\right)=-\frac{Cdu}{u^2}.$$

Основные формулы вычисления дифференциалов*

1. $dC=0$ (C — постоянная).
2. $d(u^m)=mu^{m-1}\,du$ (m — постоянная).

В частности,

$$d\sqrt{u}=\frac{du}{2\sqrt{u}},\ d\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{du}{u^2}.$$

3. $d(a^u)=a^u \ln a du$ (a — постоянная).
4. $d(e^u)=e^u\,du$.
5. $d(e^{au})=ae^{au}\,du$ (a — постоянная).
6. $d(u^v)=vu^{v-1}\,du+u^v \ln u\,dv$.

В частности,

$$d(u^u)=u^u(1+\ln u)\,du.$$

7. $d\log_a u=\frac{du}{u\ln a}=\frac{\log_a e}{u}\,du$.

---

* Все указанные формулы справедливы независимо от того, является ли u независимой переменной или функцией от другой переменной x.

В частности,

$$d\ln u = \frac{du}{u}, \quad d\lg u = \frac{du}{u \ln u}.$$

8. $d \sin u = \cos u\, du.$

9. $d \cos u = -\sin u\, du.$

10. $d \operatorname{tg} u = \dfrac{du}{\cos^2 u}.$

11. $d \operatorname{ctg} u = -\dfrac{du}{\sin^2 u}.$

12. $d \sec u = \operatorname{tg} u \sec u\, du.$

13. $d \operatorname{cosec} u = -\operatorname{ctg} u \operatorname{cosec} u\, du.$

14. $d \arcsin u = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

15. $d \arccos u = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

16. $d \operatorname{arc\,tg} u = \dfrac{du}{1+u^2}.$

17. $d \operatorname{arc\,ctg} u = -\dfrac{du}{1+u^2}.$

18. $d \operatorname{arc\,sec} u = \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$

19. $d \operatorname{arc\,cosec} u = -\dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$

Свойства дифференциала. 1. *Инвариантность формы.* Дифференциал $f'(u)du$ функции $y = f(u)$ сохраняет одно и то же выражение независимо от того, является ли ее аргумент u независимой переменной или функцией от другой независимой переменной x.

2. *Порядок малости.* Если dx — бесконечно малая, то dy и Δy — равносильные бесконечно малые и разность $\Delta y - dy$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем dx, dy и Δy.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Пользуясь определением дифференциала функции, можно для малых Δx с небольшой погрешностью заменить выражение для приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ гораздо более простым выражением $f'(x_0)\,\Delta x$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x = dy,$$

откуда имеем

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (4)$$

Приближенное равенство (4) и используется для вычисления близких значений функции.

При помощи равенства (4) можно легко получить ряд приближенных формул (см. таблицу на стр. 317), которыми часто пользуются на практике (ради сокращения записи введем обозначение: $\Delta x = h$).

Дифференциал дуги. Обозначая длину дуги CM через s (см. рис. 94), мы получим следующее выражение для дифференциала ds дуги:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \text{ или } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Геометрический смысл дифференциала дуги. Дифференциал дуги ds равен отрезку касательной MP (рис. 94) от точки касания до точки пересечения касательной с перпендикуляром, восставленным к оси Ox в точке с абсциссой $x + \Delta x$.

Дифференциал второго порядка. *Дифференциалом второго порядка* функции $y = f(x)$, или *вторым дифференциалом,* называется дифференциал от дифференциала функции. Обозначения: d^2y, $d^2f(x)$. Итак,

$$d^2y = d(dy).$$

Аналогично определяются дифференциалы любого порядка. Дифференциал n-го порядка обозначается так: $d^n y$. Если дана функция $y = f(x)$, где x — *независимая переменная*, то дифференциалы второго, третьего и высших порядков определяются по формулам:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2;\ d^3y = f'''(x)\,dx^3, \ldots, d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Если x не является независимой переменной, то эти формулы не верны.

В. Основы интегрального исчисления

1. Неопределенный интеграл. Определения и основные понятия. *Первообразной функцией* от данной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$ (или, что то же самое, дифференциал которой равен $f(x)dx$):

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

Если функция имеет первообразную, то она имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

График первообразной $F(x)$ от функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $y = f(x)$.

Если $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... — первообразные данной функции $f(x)$, то их графики представляют собой одну и ту же кривую, смещенную в ту или другую сторону в направлении оси Oy.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от дифференциала $f(x)\,dx$) называется выражение $F(x) + C$, охватывающее совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$.

Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, $F(x)$ — какая-нибудь из первообразных функций $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой *совокупность* (или, как говорят *семейство*) *всех интегральных кривых*, получаемых при непрерывном параллельном движении одной из них по направлению оси Oy от $-\infty$ до $+\infty$.

Действие отыскания первообразных называется *неопределенным интегрированием*. Неопределенное интегрирование есть действие, *обратное* дифференцированию.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен сумме функции $F(x)$ и произвольной постоянной C

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, что то же самое,

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

4. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где u — любая дифференцируемая функция от x.

2. Основные правила, формулы и способы интегрирования. Основные правила интегрирования.

1. *Постоянный множитель* можно вынести за знак интеграла

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

2. *Интеграл алгебраической суммы* равен алгебраической сумме интегралов

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx =$$
$$= \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int \psi(x)dx.$$

3. Интеграл дроби, в которой числитель есть производная знаменателя, равен натуральному логарифму знаменателя

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

Основные формулы интегрирования (таблица простейших интегралов)

1. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1).$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C =$

$$= -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + C_1.$$

В частности,

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C_1.$$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C.$$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$$

Простейшие способы интегрирования. *Непосредственное интегрирование.* При помощи основных правил интегрирования и тождественных преобразований подынтегральной функции данный интеграл приводят к одному или нескольким табличным.

Пример.

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2 (1 + x^2)} dx = \int \frac{1 + x^2 + x^2}{x^2 (1 + x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{1 + x^2}{x^2 (1 + x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2 (1 + x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Интегрирование подстановкой (способ замены переменной). Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t)\, dt^*.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \sqrt{2x - 1}\, dx$. Полагаем $2x - 1 = z$. Дифференцируя это соотно-

---

* Здесь предполагается, что $f(x)$ – непрерывная функция, а $\varphi(t)$ имеет непрерывную частную производную.

шение, находим: $2dx = dz$; откуда $dx = \frac{dz}{2}$. Итак, имеем

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \int \sqrt{z}\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int z^{1/2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{z^3} + C = \frac{1}{3}\,z\sqrt{z} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Полагаем $x = \sin t$ (тригонометрическая подстановка), тогда $dx = \cos t\,dt$. Подставляя в данный интеграл, находим:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt.$$

Для вычисления второго интеграла вводим еще подстановку: $2t = z$; тогда $2dt = dz$ и второй интеграл примет вид

$$\frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\int \cos z\,\frac{dz}{2} = \frac{1}{4}\int \cos z\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Итак,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Для того чтобы возвратиться к старому переменному x, надо t и $\sin 2t$ выразить через x, помня, что $x = \sin t$. Имеем

$$t = \arcsin x,$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Окончательно получим

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

Интегрирование по частям. Общая формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где u и v — некоторые функции от x.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x \sin x dx$. Полагая

$$x = u,\ \sin x dx = dv,$$

находим du и v:

$$du = dx,\ v = \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Теперь, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx =$$
$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$

Возьмем этот интеграл по частям, полагая

$u = x$;

откуда

$$dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}, \qquad \begin{cases} du = dx; \\ v = \int \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}, \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Интеграл

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx$$

является табличным, так как в числителе стоит производная знаменателя: $(2ax+b)\,dx = d(ax^2+bx+c)$, и

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Числитель $Mx+N$ всегда можно представить в виде

$$Mx+N = k(2ax+b)+l,$$

разделив его на производную знаменателя. Тогда интеграл распадется на два:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = k\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + l\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

первый из которых мы только что вычислили.

Вычисление интеграла

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

производится тремя разными способами в зависимости от знака дискриминанта квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

1. $b^2-4ac<0$. Квадратный трехчлен имеет два комплексно сопряженных корня и может быть преобразован к виду ay^2+d:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}\right) = ay^2+d,$$

где $y = x+\frac{b}{2a}$, $d = \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}$.

Этот прием преобразования квадратного трехчлена называется *дополнением до полного квадрата.*

Затем интеграл сводится к табличному:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dy}{ay^2+d} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^2+\frac{d}{a}}$$

$\left(\text{интеграл 13, если } \frac{d}{a} > 0, \text{ и интеграл 14, если } \frac{d}{a} < 0\right).$

2. $b^2 - 4ac = 0$. Квадратный трехчлен приводится к виду ay^2, так как в этом случае $d = 0$, а интеграл становится табличным:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dy}{ay^2} = -\frac{1}{ay} + C =$$

$$= -\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)} + C = \frac{2}{2ax+b} + C.$$

3. $b^2 - 4ac > 0$. Квадратный трехчлен разлагается на множители:

$$a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — действительные корни квадратного трехчлена.

Подынтегральное выражение разлагается на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_2)}\right) = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right).$$

Интеграл распадается на разность двух интегралов:

$$\int \frac{dx}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\int \frac{dx}{x-x_1} - \int \frac{dx}{x-x_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|.$$

Интеграл от алгебраической дроби. Используя разложение алгебраической дроби на простейшие (см. стр. 61), можно преобразовать интеграл от алгебраической дроби $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ к сумме интегралов от простейших дробей.

Пример 1 (см. пример на стр. 61). Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}\,dx.$$

Так как

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} -$$

$$- \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)} \quad \text{(см. стр. 62)},$$

то

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} -$$

$$- \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{3}\left[2\ln|x+1| - \right.$$

$$\left. - \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + \ln|x-2|\right] + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right| + C.$$

Пример 2 (см. пример на стр. 62). Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}\,dx.$$

Разлагая подынтегральную функцию на простейшие, получим

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}. \quad \text{(см. стр. 63).}$$

Интегрируя, найдем:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2\,(x+1)} = \int \frac{dx}{x+1} - 4\int \frac{dx}{(x+2)^2} =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C.$$

Пример 3 (см. пример на стр. 63). Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2\,(x^2+2)}\,dx.$$

Дробь разлагается на сумму простейших (см. стр. 64):

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2\,(x^2+2)} = \frac{1}{3\,(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2\,(x-1)}{3\,(x^2+2)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2\,(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{3}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{3}\ln|x+1| -$$

$$- \frac{3}{x+1} + \frac{1}{3}\ln\,(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

(Интеграл от $\frac{2\,(x-1)}{3\,(x^2+2)}$ разбит на два.)

Пример 4 (см. пример на стр. 65). Вычислить интеграл

$$\int \frac{3x+1}{x\,(1+x^2)^2}\,dx.$$

Используя разложение дроби на простейшие

$$\frac{3x+1}{x\,(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2},$$ (см. стр. 65):

получим

$$\int \frac{3x+1}{x\,(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{(x-3)\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

Первые два интеграла берутся легко:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|; \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Вычислим третий интеграл, разбив его на три:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{(1+x^2-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{dx}{1+x^2} + 3\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{3x+1}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x - C.$$

Последний интеграл берется по частям (см. пример на стр. 271).

Складывая все интегралы получим

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{x(1+x^2)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) +$$

$$+ \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

3. Таблица неопределенных интегралов. Интегралы от рациональных функций.

1. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \qquad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C = \frac{1}{a}\ln|C_1(ax+b)|.$

3. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,a\,(ax+b)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1).$

4. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln|ax+b| + C.$

5. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

6. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C \quad (ab > 0).$

7. $$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} \right| + C \quad (ab > 0).$$

8. $$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C \quad (a \neq b)$$

9. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \times \\ \times \ln \left| \dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C_1 \\ \text{(если } 4ac-b^2<0\text{)}, \\ -\dfrac{2}{2ax+b} + C_2 \\ \text{(если } 4ac-b^2=0\text{)}; \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C_3 \\ \text{(если } 4ac-b^2>0\text{)}. \end{cases}$$

10. $$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{M}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$ (см. № 9).

11. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}^*$$
$$(n \neq 1).$$

---

* К последнему интегралу следует применять эту же формулу до тех пор, пока не придем к интегралу 9. Такая формула носит название *рекуррентной*.

12. $$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx =$$

$$= -\frac{M}{2(n-1)\,a\,(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+\frac{2aN-bM}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (n\neq 1, \text{ см. № 11}).$$

Интегралы от иррациональных функций.

13. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C.$$

14. $$\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n}{(m+n)\,a}(ax+b)^{\frac{m+n}{n}} + C.$$

15. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C.$$

16. $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax+b}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3a^2}(3Na - 2Mb + Max)\sqrt{ax+b} + C.$$

17. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \\ \quad + C \quad (a<0), \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\times\right. \\ \left.\times\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C \\ \quad (a>0). \end{cases}$$

18. $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ (см. № 17).}$$

19. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (см. № 17).

20. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

21. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C.$

22. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C.$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

24. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

25. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} + C.$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$

27. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

28. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

29. $$\int x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + C.$$

30. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C.$$

31. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

32. $$\int \sqrt{\frac{a + x}{b + x}}\, dx = \sqrt{(a + x)(b + x)} + (a - b) \ln \left| \sqrt{a + x} + \sqrt{b + x} \right| + C.$$

33. $$\int \sqrt{\frac{a - x}{b + x}}\, dx = \sqrt{(a - x)(b + x)} + (a + b) \arcsin \sqrt{\frac{b + x}{a + b}} + C.$$

34. $$\int \sqrt{\frac{a + x}{b - x}}\, dx = -\sqrt{(a + x)(b - x)} - (a + b) \arcsin \sqrt{\frac{b - x}{a + b}} + C.$$

35. $$\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx = -\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x + C.$$

36. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x - a}{b - a}} + C.$$

Интегралы от тригонометрических функций (здесь m и n целые положительные числа).

37. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

38. $\int \sin^2 ax\, dx = -\frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C.$

39. $\int \sin^n ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\, dx.$

40. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right| + C.$

41. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$

42. $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\ (n > 1).$

43. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

44. $\int \cos^2 ax\, dx = \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C.$

45. $\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx.$

46. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

47. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$

48. $$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 1).$$

49. $$\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C.$$

50. $$\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C.$$

51. $$\int \frac{dx}{b + c \sin ax} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{ax}{2}\right)\right] + \\ \qquad + C \ (b^2 > c^2); \\ -\dfrac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \left| \dfrac{c + b \sin ax + \sqrt{c^2-b^2} \cos ax}{b + c \sin ax} \right| + \\ \qquad + C_1 \ (b^2 < c^2). \end{cases}$$

52. $$\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + C.$$

53. $$\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + C.$$

54. $$\int \frac{dx}{b + c \cos ax} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2}\right] + C \\ \qquad (b^2 > c^2); \\ \dfrac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \left| \dfrac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2-b^2} \sin ax}{b + c \cos ax} \right| + \\ \qquad + C_1 (b^2 < c^2). \end{cases}$$

55. $\int \sin mx \sin nx\, dx =$

$$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$$

($m \neq n$; при $m = n$ см. № 38).

56. $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$

($m \neq n$; при $m = n$ см. № 44).

57. $\int \sin mx \cos nx\, dx =$

$$= \begin{cases} -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C_1 & (m \neq n); \\ \frac{1}{2m} \sin^2 mx + C_2 & (m = n). \end{cases}$$

58. $\int \operatorname{tg} ax\, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + C.$

59. $\int \operatorname{tg}^2 ax\, dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x + C.$

60. $\int \operatorname{tg}^n ax\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\, dx \quad (n > 1).$

61. $\int \operatorname{ctg} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin ax| + C.$

62. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\, dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x + C.$

63. $\int \operatorname{ctg}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\, dx \quad (n > 1).$

Интегралы от некоторых трансцендентных функций.

64. $\int x \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + C.$

65. $\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a} x \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax + C.$

66. $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, dx.$

67. $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, dx.$

68. $\int \sin \ln |x|\, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln |x| - \cos \ln |x|) + C.$

69. $\int \cos \ln |x|\, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln |x| + \cos \ln |x|) + C.$

70. $\int \arcsin \frac{x}{a}\, dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

71. $\int \arccos \frac{x}{a}\, dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

72. $\int \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) + C.$

73. $\int \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) + C.$

74. $\int x \arcsin \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arcsin \frac{x}{a} +$

$$+ \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

75. $\int x \arccos \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} -$

$$- \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

76. $\int x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C.$

77. $\int x \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C.$

78. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C.$

79. $\int \ln^n x\, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x\, dx.$

80. $\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$
$(n \neq -1).$

81. $\int \frac{\ln x\, dx}{x} = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

82. $\int \frac{\ln^n x\, dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + C.$

83. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C.$

84. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$

85. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C.$

86. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$

87. $\int e^{ax} \sin(\alpha x + \beta)\, dx =$
$= \frac{e^{ax}}{a^2 + \alpha^2} [a \sin(\alpha x + \beta) - \alpha \cos(\alpha x + \beta)] + C.$

88. $\int e^{ax} \cos(\alpha x + \beta)\, dx =$
$= \frac{e^{ax}}{a^2 + \alpha^2} [a \cos(\alpha x + \beta) + \alpha \sin(\alpha x + \beta)] + C.$

4. Определенный интеграл. Определение и основные понятия. Пусть дана произвольная функция $y = f(x)$, непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$. Разобьем интервал $[a, b]$ на n частей или, как их называют, элементарных интервалов (не обязательно равных) точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}, x_n = b$ (рис. 95). Внутри или на границе каждого элементарного интервала (x_{i-1}, x_i) выбираем произвольную точку ξ_i. Обозначив теперь длины элементарных интервалов

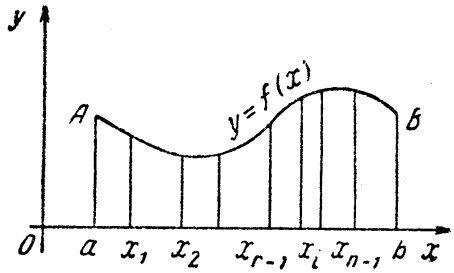


Рис. 95

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots,$$

$$\ldots, x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$$

составляем сумму вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую *интегральной суммой*, где $f(\xi_i)$ — значения данной функции в каждой из точек ξ_i.

Предел интегральной суммы (если он существует) при условии, что наибольшая из величин (Δx_i) стремится к нулю (при выполнении этого условия число n точек деления будет стремиться к бесконечности), называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b. Сформулированное определение обозначают так:

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Число a называется *нижним пределом* определенного интеграла, число b — его *верхним пределом*. Интервал $[a, b]$ называется *интервалом интегрирования*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, переменная x — *переменной интегрирования*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то предел в левой части равенства 1) существует и не зависит от выбора точек x_i деления интервала $[a, b]$.

Значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ зависит только от вида функции f и от пределов интегрирования a и b, но не зависит от переменной интегрирования, которая может быть обозначена любой буквой. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Геометрический смысл определенного интеграла. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и внутри этого интервала всюду положительна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой в декартовой системе координат площадь *криволинейной трапеции aABb* (рис. 95), ограниченной графиком подынтегральной функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, и $x = b$. При этом $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, если $f(x) \geqslant 0$ на интервале $[a, b]$, и $\int_a^b f(x)\,dx < 0$, если $f(x) \leqslant 0$.

Вычисление определенного интеграла. Если $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$, т. е. если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ или } \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, надо сначала найти первообразную $F(x)$ или неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

а затем вычислить разность $F(b) - F(a)$ значений первообразной.

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b dx = b - a.$

2. Перестановка пределов интеграла приводит к перемене знака

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

4. Если точка c находится внутри $[a, b]$, т. е. $a < c < b$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. Если c — постоянная, то

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

6. $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Интегрирование подстановкой (замена переменной в определенном интеграле). Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$.

Полагаем $2x-1=z$. Дифференцируя это соотношение, находим: $2dx=dz$, откуда $dx=\frac{dz}{2}$. Находим теперь новые пределы интеграла. Для этого из соотношения $2x-1=z$ определяем значения z_1, при $x_1=1$, и z_2, при $x_2=5$:

$$z_1=2\cdot 1-1=1;\ z_2=2\cdot 5-1=9.$$

Итак, имеем

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx=\int_1^9 \frac{\sqrt{z}\,dz}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_1^9=$$

$$=\frac{9^{3/2}}{3}-\frac{1^{3/2}}{3}=9-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Полагаем $x=\sin t$, тогда $dx=\cos t\,dt$. Находим новые пределы интеграла:

$$0=\sin t_1,\ \text{откуда}\ t_1=0;$$

$$1=\sin t_2,\ \text{откуда}\ t_2=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, имеем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt=$$

$$=\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

В отличие от неопределенного интеграла при вычислении определенного интеграла способом замены пере-

менной нет надобности возвращаться к первоначальной переменной.

Интегрирование по частям. Формула интегрирования по частям определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

где u и v — функции от x.

Приложения определенного интеграла к геометрии и физике (здесь всюду рассматривается график функции $y=f(x)$ на интервале $[a, b]$).

Площадь криволинейной трапеции aABb, ограниченной графиком знакопостоянной* на интервале $[a, b]$ функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рис. 95), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Площадь фигуры $ABCD$, заключенной на интервале $[a, b]$ между графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ (рис. 96), вычисляется так:

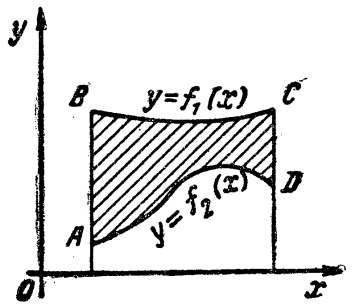


Рис. 96

$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Длина дуги AB плоской кривой $y=f(x)$ вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Площадь поверхности тела вращения. Площадь поверхности тела, образованного вращением графика

* Если на интервале $[a, b]$ функция $y=f(x)$ знакопеременна, то формулу (2) следует отдельно применять к части интервала, где $f(x)>0$ и $f(x)<0$, а затем сложить абсолютные величины полученных площадей S_1 и S_2.

функции $y = f(x)$ *вокруг оси* Ox на интервале $[a, b]$ (рис. 97), вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox на интервале $[a, b]$ (рис. 97), вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Длина пути, пройденного материальной точкой, движущейся со скоростью $v = f(t)$ за время от t_1 до t_2, равна

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$

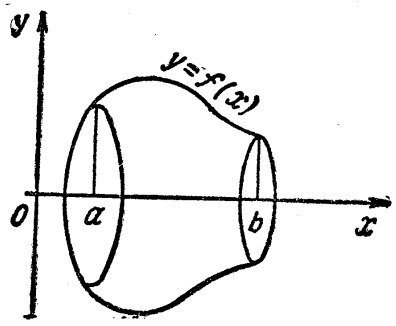


Рис. 97

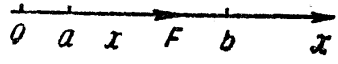


Рис. 98

Работа силы. Если материальная точка перемещается вдоль оси Ox от точки $x = a$ до точки $x = b$ под действием переменной силы F, направленной вдоль оси Ox и являющейся функцией расстояния x этой материальной точки от некоторой фиксированной точки O оси Ox (рис. 98), то работа A силы F на участке $[a, b]$ равна

$$A = \int_a^b F\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции для дуги однородной кривой и для однородной пластинки

Название	Формула	
	для дуги (рис. 99)	для пластинки (рис. 100)
Статический момент:		
относительно оси Ox	$S_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$S_x = \int_\alpha^\beta yx\,dy$*
относительно оси Oy	$S_y = \int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$S_y = \int_a^b xy\,dx$**
Координаты центра тяжести:	$x_c = \frac{S_y}{L},\ y_c = \frac{S_x}{L}$	$x_c = \frac{S_y}{S},\ y_c = \frac{S_x}{S}$
	(L — длина дуги AB)	(S — площадь пластинки)
Момент инерции:		
относительно оси Ox	$J_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$J_x = \int_\alpha^\beta y^2x\,dy$*
относительно оси Oy	$J_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$	$J_y = \int_a^b x^2y\,dx$**
относительно начала координат	$J_0 = J_x + J_y$	$J_0 = J_x + J_y$

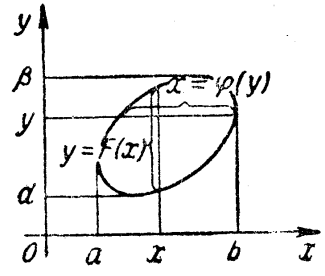


Рис. 101

* Здесь $x = \varphi(y)$ — длина сечения, параллельного оси Ox, проведенного на расстоянии y от нее (рис. 101).

** Здесь $y = F(x)$ — длина сечения, параллельного оси Oy, проведенного на расстоянии x от нее (рис. 101).

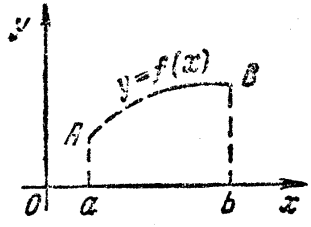


Рис. 99

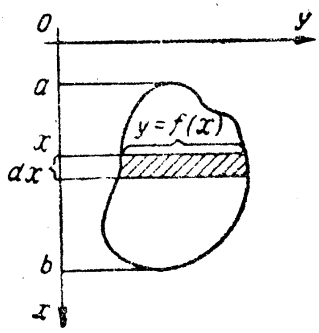


Рис. 100

Первая теорема Гюльдена. Если дуга плоской кривой длины L вращается около оси, не пересекающей эту дугу и лежащей с ней в одной плоскости, то площадь поверхности тела вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi d \cdot L,$$

где d — расстояние центра тяжести дуги от оси вращения.

Вторая теорема Гюльдена. Если пластинка площади S вращается около оси, не пересекающей ее и лежащей с ней в одной плоскости, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = 2\pi d \cdot S,$$

где d — расстояние центра тяжести пластинки от оси вращения.

Давление жидкости на вертикальную пластинку. Давление жидкости с удельным весом γ на погруженную в нее вертикальную пластинку вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b \gamma x y \, dx,$$

где y — длина горизонтального сечения пластинки на расстоянии x от поверхности жидкости $[y = f(x)]$; a — глубина самой верхней точки пластинки; b — глубина самой нижней ее точки (рис. 100).

5. Простейшие дифференциальные уравнения. Определения и общие понятия. Обыкновенным *дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, связывающее между собой независимую переменную x, функцию y и производные (или дифференциалы) различных порядков от функции y.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной (или дифференциала). Например, уравнение

$$y'' + y = 0 \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением *второго* порядка, а уравнение

$$x\,dy + y\,dx = 0 \tag{2}$$

называется дифференциальным уравнением *первого* порядка.

Всякая функция, которая, будучи подставленной в дифференциальное уравнение вместе с ее производными вместо искомой функции и ее производных, обращает это уравнение в тождество (удовлетворяет уравнению), называется *решением* или *интегралом дифференциального уравнения.*

Обычно дифференциальное уравнение сопровождается начальными условиями, причем их количество равно порядку уравнения. Тогда соответствующая задача, например, для уравнения (1) ставится так: найти решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0'. \tag{1'}$$

Решение такой задачи зависит от двух постоянных: y_0 и y_0'. В связи с этим, общим решением уравнения (1) называется функция $y(x, C_1, C_2)$, зависящая от произвольных постоянных C_1 и C_2, обращающая (1)

в тождество и удовлетворяющая (1′) при соответствующим образом подобранных значениях C_1 и C_2. Например, общим решением для уравнения (1) будет

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \qquad (*)$$

для которого $y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$ и, следовательно, $y'' + y = 0$.

Если должно быть $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$, то это значит, что

$$C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y_0;$$

$$C_1 \cos x_0 - C_2 \sin x_0 = y_0';$$

откуда

$$C_1 = y_0 \sin x_0 + y_0' \cos x_0;$$

$$C_2 = y_0 \cos x_0 - y_0' \sin x_0. \qquad (**)$$

Подставив C_1 и C_2 из (**) в (*), получим решение, удовлетворяющее уравнению (1) и начальным условиям (1′).

Так как отыскание такого решения возможно при любых заданных y_0 и y_0', то это означает, что функция (*) есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется его решение, получающееся из общего решения при каких-нибудь определенных значениях произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение может, кроме частных решений, иметь и решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольных постоянных. Такие решения называются *особыми*.

Геометрический смысл. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка изображается семейством интегральных кривых, зависящих от одного параметра (см. геометрический смысл неопределенного интеграла, стр. 266).

Простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка. *Уравнения*

с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся к виду

$$f_1(x)\,f_2(y)\,dx + \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0,$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.* Решается такое уравнение методом *разделения переменных*, т. е. преобразованием его к виду

$$\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx = 0.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид:

$$\int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy + \int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx = C.$$

Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

называются *однородными.* Подстановка $y = ux$, $y' = u'x + u$, где u — новая неизвестная функция от x, сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения. Уравнения, приводящиеся к виду

$$y' + P(x)\,y = Q(x),$$

называются *линейными.* Подстановка $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, где u и v — две новые неизвестные функции от x, сводит решение линейного уравнения к решению двух уравнений с разделяющимися переменными. Общее решение линейного уравнения находится по формуле

$$y = e^{\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

Г. Бесконечные ряды

1. Числовые ряды. Основные понятия и определения. Сходимость ряда. *Числовым рядом* называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1)$$

в котором $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (называемые *членами ряда*) — определенные числа, для которых задан закон, позволяющий определить каждое из этих чисел a_n по его номеру n.

Выражение для n-го члена ряда (т. е. для a_n) при произвольном n называется *общим членом* ряда.

Суммы

$$\left.\begin{array}{c} S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ \ldots \\ \ldots;\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

называются *частичными суммами ряда*, сумма S_n (т. е. сумма n первых членов ряда) называется n-й *частичной суммой ряда*.

Ряд называется *сходящимся*, если существует предел его n-й частичной суммы при n, стремящемся к бесконечности, т. е., если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \quad (3)$$

Число S называют *суммой ряда* и пишут

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Такую запись заменяют часто следующей сокращенной записью:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Разность R_n между суммой ряда S и его n-й частичной суммой S_n называется *остатком* или *остаточным членом* сходящегося ряда

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} + \ldots$$

Если же предела (3) не существует, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Примером бесконечного ряда может служить ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

Этот ряд, как известно, сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geqslant 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна (см. стр. 107):

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^{n+1}}{1-q}=$$

$$=\frac{a}{1-q}-a\lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q},$$

ибо при $|q|<1\lim_{n\to\infty}q^{n+1}=0$.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд сходится, то его общий член a_n при неограниченном возрастании его номера n стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Этот признак называется *необходимым* (см. стр. 127). Обратное утверждение неверно, т. е. если для некоторого ряда

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

то отсюда вовсе не вытекает, что данный ряд сходится. В качестве примера рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

называемый *гармоническим рядом*. Его n-й член стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Между тем легко доказать, что этот ряд расходящийся.

Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. *Признак сравнения рядов*. Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots;$$
$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots$$

Если каждый член второго ряда не больше соответствующего члена первого ряда

$$b_n \leqslant a_n$$

и известно, что первый ряд сходится, то второй ряд тоже сходится.

Если же

$$b_n \geqslant a_n$$

и известно, что первый ряд расходится, то второй ряд тоже расходится.

Признак Даламбера (*достаточный признак сходимости*). Если при $n \to \infty$ существует предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, равный ρ:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ ряд расходится, при $\rho = 1$ признак определенного ответа не дает: ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Знакопеременные ряды содержат как положительные, так и отрицательные члены. Если же каждый следующий член имеет знак, противоположный предыдущему, то ряд называется *знакочередующимся*.

Пример знакочередующегося ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots \qquad (4)$$

Признак сходимости Лейбница. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда убывают с возрастанием их номера n и общий член a_n ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится, причем остаток R_n ряда не превосходит по абсолютной величине первого из отбрасываемых членов.

Абсолютная сходимость ряда. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного знакопеременного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Знакопеременный ряд, абсолютные величины членов которого образуют сходящийся ряд, называется *абсолютно сходящимся*.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный ряд называется *условно сходящимся*.

Суммы некоторых конечных и бесконечных числовых рядов

Конечные ряды

1. $1+2+3+4+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\dfrac{(n\,n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

4. $1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+n^4=$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

5. $1+3+5+7+\ldots+2n-1=n^2$.

6. $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=$

$$=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

7. $1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

Бесконечные ряды

1. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots=2$.

2. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}+\ldots=\dfrac{2}{3}$.

3. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}+\ldots=\ln 2$.

4. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}+\ldots=\dfrac{\pi}{4}$.

5. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$.

6. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e$.

7. $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\ldots=\frac{1}{e}$.

8. $\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{3}{7!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots=\frac{1}{2e}$.

9. $1+2^3+\frac{3^3}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\ldots+\frac{n^3}{(n-1)!}+\ldots=15e$.

2. Функциональные ряды. Определения. Ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого являются функциями от некоторой переменной x, называется *функциональным рядом.*

При каком-нибудь определенном численном значении x_0 аргумента x функциональный ряд обращается в числовой:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

При одних значениях аргумента x могут получиться сходящиеся числовые ряды, а при других — расходящиеся. Совокупность всех значений аргумента x, при которых данный функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости. Обозначение

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

где

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x).$$

В этом случае говорят, что данный ряд сводится к функции $f(x)$.

Степенные ряды. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... — постоянные коэффициенты.

Областью сходимости степенного ряда (1) всегда является некоторый интервал $(-R, R)$ с центром в точке $x = 0$ (рис. 102), называемый *интервалом сходимости* степенного ряда. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Во всех внутренних точках своего интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно. На концах же этого интервала ряд может либо сходиться, либо расходиться. Если радиус сходимости степенного ряда R равен нулю, то этот ряд сходится только в одной точке $x = 0$; если радиус сходимости бесконечен, то ряд сходится при всех значениях аргумента x $(-\infty < x < +\infty)$.

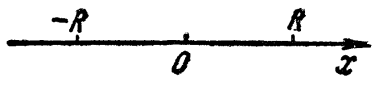


Рис. 102

Разложение функций в степенные ряды. Ряд Маклорена. Функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую производные всех порядков в промежутке $(-R, R)$, можно во многих случаях представить как сумму степенного ряда вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \quad (2)$$

называемого *рядом Маклорена* для данной функции $f(x)$. В таком случае говорят, что функция $y = f(x)$ разложена в ряд Маклорена. В формуле (2) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, .. представляют собой значения функции и ее производных при $x = 0$.

3. Таблица разложения некоторых функций в ряд Маклорена

Функция и ее ряд Маклорена	Область сходимости ряда
$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots$ $\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \times$ $\times a^{m-n}x^n + \ldots,$	$-a \leqslant x \leqslant a$ при $m > 0$, $-a < x < a$ при $m < 0$ } $a > 0$
$(a-x)^m = a^m - ma^{m-1}x + \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \times$ $\times a^{m-n}x^n + \ldots,$	
$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \ldots +$ $+ \frac{x^n \ln^n a}{n!} + \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots +$ $+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots,$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} -$ $- \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots\right],$	$-\pi < x < 0$, $0 < x < \pi$

Продолжение

Функция и ее ряд Маклорена	Область сходимости ряда
$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$ $\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)\,(2n+1)} + \ldots,$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$*,	$-1 < x \leqslant 1$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ $\ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots,$	$-1 \leqslant x < 1$
$\ln(1-x) =$ $= -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right],$	$-1 \leqslant x < 1$
$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!} + \ldots,$	$-\infty < x < +\infty$
$\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} + \ldots.$	$-\infty < x < 2\infty$

* Формулы для разложения в ряд Маклорена функций $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ легко получить, если воспользоваться соотношениями:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Ряды Фурье. *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... — постоянные величины, называемые коэффициентами тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд (1) короче записывают так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (1')$$

Если тригонометрический ряд (1) сходится для всех значений x к некоторой функции $f(x)$, то коэффициенты этого ряда связаны с функцией $f(x)$ следующими соотношениями Эйлера — Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0, 1, 2, \ldots); \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Имеет большое практическое значение следующая задача: по заданной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π найти всюду сходящийся тригонометрический ряд (1), имеющий сумму $f(x)$.

Оказывается, что для всех практически важных непрерывных функций такая задача имеет решение, причем коэффициенты искомого ряда (1) находятся по формулам (2) Эйлера — Фурье.

Тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого определяются по формулам (2), где $f(x)$ — заданная функция, называется *рядом Фурье для функции* $f(x)$.

Задача, о которой шла речь, называется иначе разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье.

В ряд Фурье можно разложить и непериодическую функцию $f(x)$. Такой ряд будет сходиться к заданной функции $f(x)$ только на интервале $(-\pi, \pi)$. Вне этого интервала и на его концах сумма ряда будет отличаться от соответствующего значения самой функции $f(x)$.

Достаточное условие разложения функции в ряд Фурье. Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем конечное число экстремумов, то ряд Фурье для этой функции сходится всюду, причем для любого значения x внутри интервала $[-\pi, \pi]$ его сумма равна $f(x)$, на концах же этого интервала его сумма равна

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)],$$

т. е. среднему арифметическому значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$.

Разложение некоторых

Функция	Разложение в ряд Фурье
$y = x$	$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$
$y = x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$

Ряд Фурье для четной и нечетной функций. Для четной (см. стр. 241) функции $f(x)$ коэффициенты Эйлера — Фурье равны

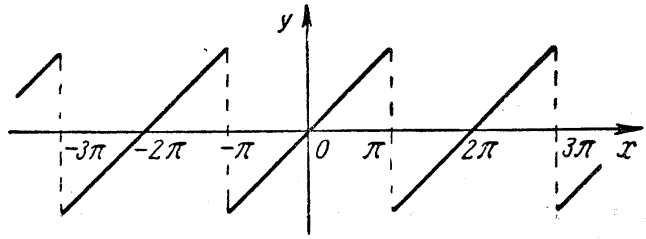
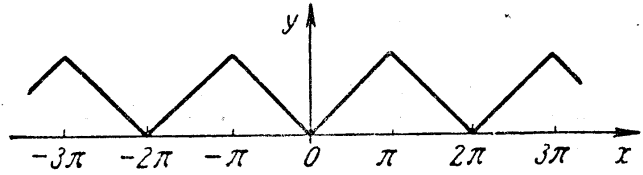
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0;$$

для нечетной же функции $f(x)$

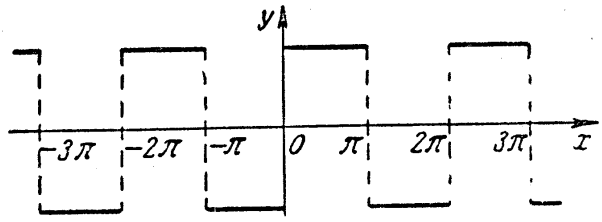
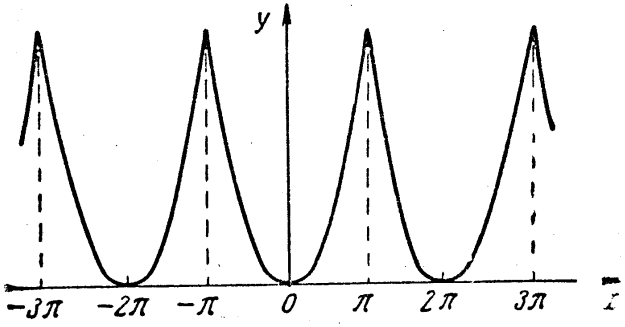
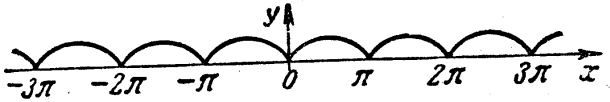
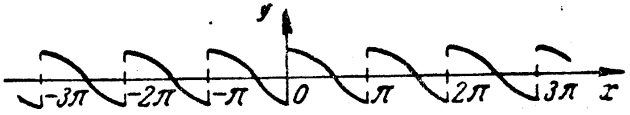
$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Если функция $f(x)$ задана лишь на интервале $(0, \pi)$, то ее можно разложить в ряд Фурье либо только по косинусам, если доопределить эту функцию на интервале $(-\pi, 0)$ как четную, либо только по синусам, если доопределить ее на интервале $(-\pi, 0)$ как нечетную.

функций в ряд Фурье

Интервал сходимости ряда к данной функции	График суммы ряда Фурье
$-\pi < x < \pi$	
$0 < x < \pi$	

Функция	Разложение в ряд Фурье
$y=a$	$\frac{4a}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$
$y=x^2$	$\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)$
$y=\sin x$	$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$
$y=\cos x$	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{2\sin 4x}{3\cdot 5}+\frac{3\sin 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$

Интервал сходимости ряда к данной функции	График суммы ряда Фурье
$0<x<\pi$	
$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$	
$0<x<\pi$	
$0 \leqslant x \leqslant \pi$	

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А. Приближенные вычисления

1. Определения. Пусть A — точное значение некоторой величины. Число a называется *приближенным значением* A с ошибкой $|\Delta|$, если $A - a = \Delta$. Если $\Delta > 0$, то a — приближенное значение A *с недостатком*; если $\Delta < 0$, то a — приближенное значение A *с избытком*. Например, если $A = 1{,}317$, то $a = 1{,}31$ — приближенное значение A с недостатком, а $a = 1{,}32$ — приближенное значение A с избытком.

Абсолютной погрешностью данного приближенного числа a называется разность между точным числом A и его приближенным значением, т. е.

$$\Delta = A - a.$$

То обстоятельство, что a есть приближенное значение A, кратко записывают так: $a \approx A$; например, $\pi \approx 3{,}14$ или $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}70998$.

Примечание. Если A неизвестно, но известна граница δ, за которую наверняка не выходит $|\Delta|$, т. е. $|\Delta| \leqslant \delta$, то в этом случае δ называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения a, т. е.

$$|A - a| \leqslant \delta \text{ или } -\delta \leqslant A - a \leqslant \delta \ (\delta > 0).$$

Относительной погрешностью ε называется отношение абсолютной погрешности Δ к приближенному значению a, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{a}.$$

Относительной погрешностью пользуются для характеристики точности приближений (например, результата измерений или вычислений), ее часто вычисляют в процентах или в промилях; она является отвлеченным (безразмерным) числом. Чем меньше относительная ошибка, тем точнее приближенный результат Например:

$$\text{для } \pi = 3{,}14 \ldots \varepsilon = \frac{0{,}00159}{3{,}14} \approx \frac{1}{1970} \text{ или } 0{,}056\%,$$

$$\text{для } \pi = 3{,}142 \ldots \varepsilon = \frac{0{,}00041}{3{,}142} \approx \frac{1}{7660} \text{ или } 0{,}013\%.$$

2. Значащие цифры и верные знаки. *Значащими цифрами* числа называют все его цифры, за исключением нулей, стоящих впереди первой цифры, отличной от нуля и тех нулей справа, которые заменяют отброшенные или неизвестные цифры.

Например: число, 3,141 имеет четыре значащих цифры; число 0,00217 имеет три значащих цифры; первая из них 2.

Нули, стоящие впереди, позволяют определять разряд первой, отличной от нуля цифры в данном числе.

Каждое число характеризуется своей значностью. *Значностью числа, равного и большего единицы,* называют число цифр, стоящих в его целой части, а *значностью числа, меньшего единицы,* называют число нулей, стоящих после запятой до его первой значащей цифры; такую значность считают отрицательной. Например:

Для числа	467,39	значность равна		3,
» »	1,07	»	»	1,
» »	0,64	»	»	0,
» »	0,00810	»	»	—2.

Число десятичных знаков в приближенном числе характеризует его абсолютную точность, а число значащих цифр — его относительную точность.

Если абсолютная погрешность десятичного числа a равна единице разряда, который занимает n-я значащая цифра, то это значит, что a имеет n *верных знаков* (цифр). Например: если число 0,0817 — приближенное значение A с точностью до 0,0001, то оно имеет три верных знака.

В записи приближенного числа с помощью десятичной дроби оставляют только верные знаки. В этом случае по виду записи можно сразу определить точность приближения. Например; если дано число 4,796, то приближенным значением с точностью до 0,01 будет 4,80 (но ни в коем случае не 4,8).

Если написано число $7{,}6 \cdot 10^3$, то погрешность его равна $0{,}1 \cdot 10^3 = 100$; если же дано число $76{,}0 \cdot 10^2$, то погрешность равна $0{,}1 \cdot 10^2 = 10$; если, наконец, дано число 7600, погрешность равна 1.

3. Оценка точности приближенных чисел. Точность приближенного числа a можно оценить:

1) вычислением границ — чисел, между которыми содержится данное число a, т. е.

$$l_1 < a < l_2.$$

Здесь число l_1 — низшая граница a, число l_2 — высшая его граница;

2) числом верных цифр;

3) вычислением предельной абсолютной и предельной относительной ошибок числа a;

4) средней квадратичной ошибкой числа a (см. стр. 321).

4. Округление чисел. *Округлением* числа до n знаков называется сохранение в этом числе первых n значащих цифр.

Простое округление заключается в том, что при округлении чисел во всех случаях в них отбрасывают справа от n-й цифры ненужные разряды цифр без изменения оставляемой n-й цифры в округленном числе. Например, числа 18,964 и 0,8958 после округления их соответственно до четырех и трех значащих цифр будут 18,96 и 0,895.

При механическом округлении во всех случаях отбрасывают в округленном числе справа от n-й цифры ненужные разряды цифр, увеличивая при этом n-ю цифру в числе на единицу. Например: числа 18,964 и 0,8958 после округления их соответственно до четырех и трех значащих цифр будут 18,97 и 0,896.

Для уменьшения погрешности округления пользуются округлением с поправкой или по дополнению. При этом способе округления числа в нем отбрасывают все цифры, стоящие справа от n-й цифры, оставляя последнюю без изменения, если следую-

щая за ней цифра меньше 5, и увеличивая n-ю цифру на 1, если следующая за ней цифра больше 5. Например, число 131,29 853 после округления его до шести и пяти значащих цифр соответственно будет 131,299 или 131,30, а число 87,8242 после округления его до пяти и четырех значащих цифр будет 87,824 или 87,82.

Примечание. Если в точном числе последней цифрой является цифра пять (5), то предшествующая ей цифра увеличивается на единицу только в том случае, когда она нечетная. Например: точные числа 35,965 и 49,875 после округления до 0,01 соответственно будут 35,96 и 49,88.

5. Правила действий с приближенными числами. а) Сложение. Для того чтобы при сложении приближенных чисел получить сумму с n верными десятичными знаками, нужно каждое слагаемое округлить до $(n+1)$-го десятичного знака.

б) Вычитание. В случае, когда уменьшаемое значительно превосходит вычитаемое, к числу верных знаков разности применяют те же правила, что и для числа верных знаков суммы.

В случае вычитания близких чисел может быть потеря точности. Поэтому следует избегать действия вычитания близких чисел. Часто в таких случаях удобно использовать дифференциал функции (см. стр. 262).

При сложении или вычитании приближенных чисел в результате (в сумме или в разности) необходимо оставлять столько десятичных знаков, сколько их дано в компаненте с наименьшим числом этих знаков.

Примеры.

$$233{,}78 + 52{,}308 + 3{,}9313 \approx 233{,}78 + 52{,}31 + 3{,}93 = 290{,}02;$$

$$2529{,}37 - 2{,}1462 \approx 2529{,}37 - 2{,}15 = 2527{,}22.$$

в) Умножение. При умножении двух приближенных чисел, имеющих поровну значащих цифр, в произведении следует сохранить столько значащих цифр, сколько их было в каждом из сомножителей. Например:

$$95{,}6 \times 21{,}8 = 2084{,}08 \approx 20{,}8 \cdot 10^2.$$

При умножении приближенных чисел с разным числом значащих цифр в результате следует сохранять

столько значащих цифр, сколько их имеет менее точное данное, причем менее точным считается то число, у которого меньше значащих цифр. Например:

$$2{,}143 \times 0{,}45 = 0{,}96\,435 \approx 0{,}96.$$

Для получения произведения с n верными знаками необходимо сомножители взять с $n+1$ или $n+2$ верными знаками.

Правило для вычисления произведения с n верными знаками способом сокращенного умножения.

1. Сомножители округляют до $n+2$ верных знаков.
2. Под множимым подписывают написанный в обратном порядке множитель так, чтобы его последняя цифра находилась под $(n+2)$-й цифрой множимого.
3. Каждую цифру множителя умножают на часть множимого от первой его цифры до той (включительно), которая находится под соответствующей цифрой множителя и т. д. Все полученные таким способом частные произведения пишут в виде столбца так, чтобы последние цифры их находились на одной вертикали, и складывают; в полученном результате будут верны по меньшей мере первые n значащих цифр.
4. Если произведение первых значащих цифр сомножителей больше десяти, то сомножители можно взять с $n+1$ знаками.
5. При выполнении указанных выше операций запятых в сомножителях не ставят, а место запятой в произведении определяют перемножением в уме грубо округленных сомножителей.

Пример. Вычислим произведение $x = 2{,}5284 \times 64{,}38$ с тремя верными знаками, так как наименьшее количество верных знаков в сомножителях равно четырем. Округляем множимое до четырех знаков и подписываем под ним цифры множителя в обратном порядке:

2528	Нахождение частных произведений:
8346	1) $2528 \times 6 = 15168$;
15 168	2) $252 \times 4 = 1008$,
+ 1 008	$25 \times 3 = 75$,
75	$2 \times 8 = 16$.
16	
162,67	

Итак, $2{,}5284 \times 64{,}38 \approx 163$.

г) Деление. При делении двух приближенных чисел, имеющих одинаковое число значащих цифр, в частном сохраняют столько значащих цифр, сколько их в каждом из данных. Например:

$$2{,}667 : 3{,}143 = 0{,}848552 \ldots \approx 0{,}8486.$$

При делении двух приближенных чисел, имеющих различное количество значащих цифр, в частном сохраняют столько значащих цифр, сколько их в менее точном данном, причем менее точным считается число, имеющее меньше значащих цифр, например:

$$654{,}8 : 2{,}6 = 251{,}8 \approx 2{,}5 \times 10^2.$$

д) Возведение в степень. При возведении приближенных чисел в квадрат и в куб в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени; однако при этом последняя цифра, и особенно при возведении в куб, будет все же менее надежна, чем последняя цифра основания.

Примеры:

$$14{,}81^2 \approx 219{,}3; \quad 1{,}27^3 \approx 2{,}05.$$

е) Извлечение корня. При извлечении квадратного или кубического корня из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число; при этом последняя цифра квадратного и особенно кубического корня будет получаться более надежной, чем последняя цифра подкоренного числа.

Примеры:

$$\sqrt{40{,}5} \approx 6{,}36; \quad \sqrt[3]{180{,}9} \approx 5{,}656.$$

ж) Логарифмирование. Вычисления однозначных выражений при помощи логарифмов следует производить по таблицам логарифмов с числом десятичных знаков на один больше наименьшего числа значащих цифр, содержащихся в приближенном данном. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

По данному логарифму, содержащему n верных знаков в мантиссе (погрешность ее не превышает 0,5 единицы n-го знака), можно найти число, в котором будет не более n верных цифр.

Примечание. 1. Если для вычисления искомой величины требуется произвести ряд разных действий, то в этом случае во всех промежуточных результатах следует сохранять лишь на одну цифру больше, чем это указано в правилах *а*, *б*, *в*, *г* и *д*, отбрасывая эту лишнюю цифру только в окончательном результате.

2. Если некоторые величины, участвующие в вычислении, имеют десятичных знаков (при сложении и вычитании) или значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня) больше, чем другие, то их предварительно округляют (по способу с поправкой), сохраняя лишь одну лишнюю цифру против числа, заданного с наименьшим числом значащих цифр.

3. Для получения результата с n цифрами исходные данные для вычисления следует брать с таким числом цифр, какое согласно правилам *в*, *г*, *д*, *е* дают $n+1$ цифр результата.

6. **Приближенные формулы.** Ниже приведены некоторые приближенные формулы с указанием наибольших значений переменных h, при которых можно получать результаты вычислений с n верными десятичными знаками.

Формулы	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$(1+h)^2 \approx 1+2h$	0,07	0,022	0,007
$(1+h)^3 \approx 1+3h$	0,04	0,012	0,004
$\frac{1}{1+h} \approx 1-h$	0,06	0,022	0,007
$\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{1}{2}h$	0,19	0,063	0,020
$\sqrt[3]{1+h} \approx 1+\frac{1}{3}h$	0,20	0,068	0,021
$\lg(1+h) \approx 0{,}4343h$	0,14	0,047	0,015
$\lg\frac{1+h}{1-h} \approx 0{,}869h$	0,25	0,119	0,055
$\ln\frac{1+h}{1-h} \approx 2h$	0,19	0,090	0,042

Продолжение

Формулы	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$10^h \approx 1 + 2{,}30h$	0,04	0,014	0,004
$e^h \approx 1 + h$	0,09	0,031	0,010
$\sin h \approx h$	17°	8°15′	3°50′
$\sin h \approx h - \frac{1}{6} h^3$	51°	32°	20°
$\cos h \approx 1$	5°43′	1°48′	0°34′
$\cos h \approx 1 - \frac{1}{2} h^2$	33°	18°	10°
$\operatorname{tg} h \approx h$	14°	6°25′	3°02′
$\operatorname{tg} h \approx h + \frac{1}{3} h^3$	29°	18°	11°

В ряде случаев для малых значений h, q и z можно пользоваться следующими сокращенными формулами

$$(1 + h)^n \approx 1 + nh;$$

$$(1 + h)\ (1 \pm q) \approx 1 + h \pm q;$$

$$(1 + h)\ (1 \pm q)\ (1 + z) \approx 1 + h \pm q + z,$$

$$\frac{1}{1 \pm h} \approx 1 \mp h;$$

$$\frac{1 + h}{1 + q} \approx 1 + h - q;$$

$$(a \pm h)^n \approx a^n \pm na^{n-1}h;$$

$$\frac{a}{1 \pm h} \approx a \mp ah;$$

$$\operatorname{ctg} h \approx 1 : h;$$

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a};$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h}} \approx \frac{1}{a} - \frac{h}{2a^3};$$

$$\frac{1}{a+h} \approx \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2}.$$

Если угол α мал и $\alpha < \varphi$, а $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin(\varphi \pm \alpha) \approx \sin\varphi \pm \alpha\cos\varphi;$$

$$\cos(\varphi \pm \alpha) \approx \cos\varphi \mp \alpha\sin\varphi;$$

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\varphi \pm \frac{\alpha}{\cos^2\varphi}.$$

Б. Ошибки и оценка точности результатов измерений

1. Методы и ошибки измерений. Измерения бывают непосредственные и косвенные.

Непосредственными называют такие методы измерения, при которых определяемые величины получают в результате непосредственного сравнения их с единицей измерений; например, измерение отрезков линий рулеткой.

Косвенными называют такие методы измерения, при которых определяемые величины получают как функции других непосредственно измеренных величин, например, определение стороны треугольника по измеренным другой стороне и двум углам треугольника.

Измерения подразделяются также на равноточные, когда одна и та же величина многократно измеряется при одинаковых условиях, и неравноточные, когда одна и та же величина многократно измеряется при различных условиях (такие результаты нельзя считать одинаково надежными).

Если x — истинное значение, l — результат измерения, то

$$x - l = \Delta$$

будет абсолютной (истинной) ошибкой измерения. Ошибки измерений по своему характеру и свойствам

бывают грубые, систематические и случайные.

Грубыми ошибками (промахами) называют такие уклонения результатов измерений от точного значения, которые совершенно недопустимы для данных условий измерений (инструмента и метода работ).

Систематическими называют ошибки, входящие в результаты измерения по определенному закону.

Случайными называют ошибки, для которых неизвестен закон их появления в каждом конкретном случае.

Случайные ошибки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ многократных равноточных измерений одной и той же величины обладают следующими свойствами:

1) ошибки по абсолютному значению не могут превышать известного предела;

2) меньшие по абсолютному значению ошибки появляются чаще бóльших;

3) положительные и отрицательные ошибки, равные по абсолютному значению, одинаково возможны;

4) среднее арифметическое из всех случайных ошибок ряда равноточных измерений стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n} = 0.$$

2. Среднее арифметическое (арифметическая середина). Если $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты равноточных измерений одной и той же величины, истинное значение которой x, то

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

есть *арифметическая середина,* т. е. среднее арифметическое данных величин; $[l]$ — сумма однородных величин.

Так как

$$\Delta_1 = x - l_1, \quad \Delta_2 = x - l_2, \ldots, \quad \Delta_n = x - l_n,$$

то

$$x = \frac{[l]}{n} + \frac{[\Delta]}{n}.$$

Разности

$$L - l_1 = v_1, \quad L - l_2 = v_2, \ldots, \quad L - l_n = v_n.$$

называются *вероятнейшими ошибками* или *уклонениями* от арифметической середины:

$$nL - [l] = [v]; \quad [v] = 0.$$

Пример. $l_1 = 184{,}05$, $l_2 = 184{,}17$, $l_3 = 183{,}96$

$$L = 180 + \frac{4{,}05 + 4{,}17 + 3{,}96}{3} = 184{,}06,$$

или

$$L = 183 + \frac{1{,}05 + 1{,}17 + 0{,}96}{3} = 184{,}06;$$

$$[v] = 0{,}01 - 0{,}11 + 0{,}10 = 0.$$

3. Оценка точности результатов непосредственных измерений. Для оценки точности результатов многократных непосредственных измерений одной и той же величины пользуются различными способами.

Обозначения

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — истинные ошибки непосредственных измерений;

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ — вероятнейшие ошибки измерений (разности между средними арифметическими и результатами непосредственных измерений);

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ — равноточные результаты измерений;

$L = \frac{[l]}{n}$ — среднее арифметическое;

$l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ — неравноточные результаты измерений;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ — их вес (степень надежности результата измерения, выраженная числом, называется весом этого результата);

$\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ — разности двойных измерений, свободные от систематических ошибок.

Равноточные измерения

$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ или $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$ — средняя квадратичная ошибка отдельного измерения;

$\nu = \frac{[|\Delta|]}{n}$ при $n \to \infty$ $\nu = \frac{4}{5}$ m — средняя ошибка,

$\rho = 0{,}6745m$ — вероятная ошибка;

$\Delta_{lim} = 3m$ или $\Delta_{lim} = 2m$ — предельная ошибка измерения;

$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ — средняя квадратичная ошибка арифметической середины.

Средняя квадратичная ошибка арифметической середины равноточных измерений в $\sqrt{n}$ раз меньше средней квадратичной ошибки отдельного измерения.

Пример. Результаты 4-кратного измерения рулеткой расстояния между точками A и B помещены в таблице. Определить L, m, M и Δ_{lim}.

Измерения	Результаты измерения l	$v = L - l$	v^2
1	317,81 *м*	+ 0,01	0,0001
2	317,75 „	+ 0,07	0,0049
3	317,87 „	− 0,05	0,0025
4	317,85 „	− 0,03	0,0009
$n = 4$	$L = 317{,}82$ „	$[v] = 0$	$[v^2] = 0{,}0084$

$$L = 317 + \frac{0{,}81 + 0{,}75 + 0{,}87 + 0{,}85}{4} = 317{,}82;$$

$$m = \sqrt{\frac{0{,}0084}{3}} \approx \pm 0{,}05 \text{ м};$$

$$M = \frac{0{,}05}{\sqrt{4}} \approx \pm\, 0{,}03\ м,$$

$$\Delta_{lim} = \pm\, 0{,}15\ м.$$

Если одна и та же величина измерена дважды и получен ряд двойных равноточных измерений

$$l'_1 \text{ и } l''_1,\ l'_2 \text{ и } l''_2, \ldots, l'_n \text{ и } l''_n,$$

где $l'_1,\ l'_2, \ldots, l'_n$ — результаты первых измерений, а $l''_1,\ l''_2, \ldots, l''_n$ — результаты вторых измерений, то

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2n}};$$

где $\partial_1 = l'_1 - l''_1,\ \partial_2 = l'_2 - l''_2, \ldots, \partial_n = l'_n - l''_n$

при $n \to \infty\ [\partial] = 0$).

Пример. Каждый из трех отрезков измеряли дважды: в прямом и обратном направлениях (см. таблицу); определить m.

Отрезки	Результаты измерений		∂ в *см*	∂^2
	прямо	обратно		
1	127,64	127,59	+ 5	25
2	93,89	93,95	— 6	36
3	141,17	141,14	+ 3	9
$n = 3$			$[\partial] = +2$	$[\partial^2] = 70$

$$m = \sqrt{\frac{70}{6}} \approx \pm\, 3\ см.$$

Если в разностях двойных измерений содержатся не только случайные, но и систематические ошибки $\Delta\partial$, то в этом случае

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{2(n-1)}},$$

где $v_1 = \partial_1 - \Delta\partial_1,\ v_2 = \partial_2 - \Delta\partial_2, \ldots, v_n = \partial_n - \Delta\partial_n,\ \Delta\partial = \frac{[\partial]}{n}$.

Пример. Результаты двукратного измерения каждого из трех углов показаны в таблице на стр. 323; определить m.

Углы	Результаты измерений		∂	v	v^2
	l'	l''			
1	84°43′19″	84°43′23″	— 4″	—1″	1
2	64°54′45″	64°54′48″	— 3″	0	0
3	78°29′43″	78°29″45″	— 2″	+1″	1
$n=3$			$[\partial]=-9$	$[v]=0$	$[v^2]=2$

$$\Delta\partial = \frac{-9''}{3} = -3''; m = \sqrt{\frac{2}{2(3-1)}} \approx \pm 0'',7.$$

Неравноточные измерения

Степень доверия к результату, выраженная числом, называется *весом* этого результата. В частности, за вес может быть принято число измерений одной и той же величины.

$L_0 = \frac{[l'p]}{[p]}$ — вероятнейшее значение измеряемой величины (общая арифметическая середина);

$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$ — средняя квадратичная ошибка единицы веса;

$p = \frac{\mu^2}{m^2}$ (если $\mu = 1$, то $p = \frac{1}{m^2}$) — зависимость между весом и средней квадратичной ошибкой результата измерений;

$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}$ — средняя квадратичная ошибка вероятнейшего значения (общей средней арифметической величины);

$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}$ — средняя квадратичная ошибка единицы веса из ряда двойных неравноточных измерений.

Пример. Средние результаты измерения угла L плоского треугольника и их веса приведены в таблице на стр. 324: определить L_0, μ и M_0.

Группы измерений	Средние значения	Вес группы p	v_0	pv_0	pv_0^2
1	83°19′41″	4	— 1	— 4	4
2	83°19′35″	2	+ 5	+ 10	50
3	83°19′42″	3	— 2	— 6	12
L_0 = 83°19′40″		$[p] = 9$		0	$[pv_0^2] = 66$

$$L_0 = 83°19'30 + \frac{11'' \times 4 + 5'' \times 2 + 12'' \times 3}{4+2+3} = 83°19'40'';$$

$$\mu = \sqrt{\frac{66}{3-1}} \approx +5'',7; \quad M_0 = \frac{5'',7}{\sqrt{9}} \approx \pm 1'',9.$$

4. Ошибки функций измеренных величин. Результаты действий над приближенными числами являются также приближенными. Приближенные числа получаются и в результате действий над точными числами, за исключением лишь сложений, вычитаний и некоторых случаев умножения и возведения в степень.

Обозначения

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты однородных непосредственных измерений;

$\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ — их случайные абсолютные ошибки;

L — функция;

ΔL — случайная абсолютная ошибка функции;

ε — относительная ошибка функции;

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ — постоянные (коэффициенты);

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ — средние квадратичные ошибки результатов из многократных равноточных измерений;

m_z — средняя квадратичная ошибка функции.

Функции	Ошибки функций
$L = l_1 \pm l_2 \pm \pm \ldots \pm l_n$	$\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n$. ε равна наибольшей из относительных ошибок слагаемых. $m_z = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2}$. При $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$ $m_z = \pm m\sqrt{n}$
$L = kl$	$\Delta L = k\Delta l$; $\varepsilon = k\frac{\Delta l}{l}$; $m_z = km$
$L = k_1 l_1 \pm k_2 l_2 \pm \pm \ldots \pm k_n l_n$	$\Delta L = k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2 + \ldots + k_n\Delta l_n$; $m_z = \pm \sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2}$. При $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ и $m_1 = m_2 = = \ldots = m_n = m$ $m_z = \pm km\sqrt{n}$
$L = l_1 l_2 \ldots l_n$	$\Delta L = l_2 l_3 \ldots l_n \Delta l_1 + l_1 l_3 \ldots l_n \Delta l_2 + + \ldots + l_1 l_2 \ldots l_{n-2} l_{n-1} \Delta l_n =$ $= L \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\Delta l_i}{l_i} \right\|$; $\varepsilon = \left\| \frac{\Delta l_1}{l_1} \right\| + \left\| \frac{\Delta l_2}{l_2} \right\| + \ldots + \left\| \frac{\Delta l_n}{l_n} \right\| = = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\Delta l_i}{l_i} \right\|$; $m_z = \pm L \sqrt{\frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} + \ldots + \frac{m_n^2}{l_n^2}}$

Продолжение

Функции	Ошибки функций
$L = \frac{l_1}{l_2}$	$\Delta L = L\left(\frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_2}{l_2}\right);$ $\varepsilon = \left\lvert \frac{\Delta l_1}{l_1} \right\rvert + \left\lvert \frac{\Delta l_2}{l_2} \right\rvert;$ $m_z = \pm \frac{1}{l_2} \sqrt{m_1^2 + (Lm_2)^2}$
$L = \frac{k}{l}$	$\Delta L = -\frac{k\Delta l}{l^2};\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
$L = \frac{l}{k}$	$\Delta L = \frac{\Delta l}{k};\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
$L = l^n$ (n — точное число)	$\Delta L = L \cdot n \frac{\Delta l}{l};\ \varepsilon = n\frac{\Delta l}{l};$ $m_z = \pm n l^{n-1} m^2$
$L = \sqrt[n]{l}$	$\Delta L = L \frac{\Delta l}{nl};\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{nl}$
$L = \lg l$	$\Delta L = M \frac{\Delta l}{l}$ $(M = 0{,}43429\ldots);$ $m_z = \pm \frac{M}{l} m$
$L = f(l_1, l_2, \ldots, l_n)$	$\Delta L = \frac{\partial f}{\partial l_1} \Delta l_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \Delta l_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \Delta l_n;$ $m_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1} m_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} m_n\right)^2}$

Примеры.

1. Найти число верных знаков в выражении $(0{,}3862)^4$.

Поскольку относительная ошибка данного числа равна

$$0{,}00005 : 0{,}3862 < 0{,}00013,$$

то относительная ошибка степени меньше, чем

$$4 \cdot 0{,}000\,13 = 0{,}000\,52.$$

Следовательно, требуемое число с пятью знаками будет

$$(0{,}3862)^4 \approx 0{,}0\,222\,46.$$

$$\Delta L = 0{,}0222\,46 \cdot 0{,}000\,52 \approx 0{,}0000\,12.$$

Эта ошибка уменьшает четвертую цифру результата, поэтому получим

$$(0{,}3862)^4 \approx 0{,}02225,$$

причем последняя цифра может быть не верна на единицу.

2. Отрезок $L = MN$ измерен по частям: отрезок $l_1 = MP$ с ошибкой $m_1 = \pm 0{,}09$ и отрезок $l_2 = PN$ с ошибкой $m_2 = \pm 0{,}17$. Определить m_z.

$$m_z = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{0{,}09^2 + 0{,}17^2} \approx \pm 0{,}20 \text{ м}.$$

3. Каждый из трех углов измерен с ошибкой $m_1 = \pm 15''$. Определить m_z — ошибку суммы трех углов:

$$m_z = m\sqrt{n} = \pm 15'' \sqrt{3}.$$

4. Принимая скорость движения Земли вокруг Солнца равной 30 *км* в секунду, определенную с $\Delta l = \pm 0{,}1$ *км*, вычислить путь L, который пройдет Земля за один час и ΔL:

$$L = 3\,600 \times 30 = 108\,000 \text{ км};$$

$$\Delta L = k\Delta l = 3\,600 \times 0{,}1 = 360 \text{ км}.$$

В. Способы и средства вычислений

1. Формула, алгорифм, схема. *Формула* показывает, какие действия следует произвести над данными числами для получения значения определенной величины. Практические вычисления производят главным образом по некоторой формуле.

Каждая формула перед ее использованием должна быть преобразована так, чтобы при данных средствах вычислений (см. стр. 329) определение искомой величины выполнялось с минимальной затратой времени.

Алгорифм. Порядок вычисления искомой величины, выраженный в виде некоторого правила, называется алгорифмом.

Схема. Числовой материал, используемый при вычислениях, следует располагать в определенной последовательности. Для этой цели при массовых вычислениях одних и тех же величин пользуются специально разрабатываемыми схемами (бланками, формулярами с соответствующей разграфкой), позволяющей каждое участвующее в вычислении число разместить в отведенном для него месте. В заголовке схем часто приводят формулы, для которых они составлены.

Каждая схема должна: 1) определять последовательность вычислений, исключая всякие лишние действия, 2) обеспечивать контроль вычислений в процессе выполнения и при полном окончании его, 3) быть по возможности стандартной.

2. Выражение углов в разных мерах. Углы на плоскости измеряются в градусной мере (см. стр. 128), в радианной (см. стр. 128), а также в градовой и часовой мерах.

Градовая мера углов

Град (g) — $^1/_{400}$ — часть полного оборота.

Градовая (метрическая) минута ($'$) — $^1/_{100}$ часть града.

Градовая (метрическая) секунда ($''$) — $^1/_{10\,000}$ часть града, $^1/_{100}$ часть метрической минуты.

Полный оборот составляет 400 g.

Запись $87g45'38'' = 87g45\ 38$ означает 87 град 45 градовых минут 38 градовых секунд.

$$1g = 54',\ 1' = 32'',4,\ 1'' = 0'',324.$$

$$1g = \frac{\pi}{200} \text{ радианов} \approx 0{,}015708.$$

$$1' = \frac{\pi}{20000} \text{ радианов} \approx 0{,}00015708,$$

$1'' = \frac{\pi}{2000000}$ радианов $\approx 0{,}00000\ 15\ 708.$

1 радиан $= \frac{200}{\pi} \approx 63^g{,}662.$

Часовая мера углов

Час (h) — $^1/_{24}$ — часть полного оборота.
Минута (m) — $^1/_{60}$ часть часа.
Секунда (s) — $^1/_{3600}$ часть часа, $^1/_{60}$ часть минуты.

Полный оборот составляет 24 часа.
Запись: $7^h32^m59^s$ означает 7 часов 32 минуты 59 секунд.

$1^h = 15°,\ 1^m = 15',\ 1^s = 15''.$

$1^h = \frac{\pi}{12}$ радианов $\approx 0{,}26180.$

$1^m = \frac{\pi}{720}$ радианов $\approx 0{,}0043633.$

$1^s = \frac{\pi}{43\,200}$ радианов $\approx 0{,}000072\,722.$

1 радиан $= \frac{12^h}{\pi} \approx 3^h{,}8197.$

3. Средства вычислений. В зависимости от точности исходных данных и характера самих вычислений пользуются разными средствами — *таблицами, счетными машинами и приборами* (механические средства), *графиками и номограммами.*

Таблицы содержат значения определенных функций с соответственно установленной точностью (см. стр. 332).

Счетные машины могут быть непрерывного действия и дискретного счета. В машинах непрерывного действия, позволяющих получать результаты сравнительно ограниченной точности, математические величины изображаются в виде конкретных физических величин, например: длин отрезков, углов поворота, электрических сигналов и др. Примером устройства непрерывного действия является логарифмическая линейка (см. стр. 337), планиметр.

На машинах дискретного счета, являющихся счетно-цифровыми, можно в принципе получать результаты с неограниченной точностью. Решение задачи на них сводится к последовательному выполнению отдельных арифметических действий. Машины разделяются на механические, электрические и электронные. Классификация счетно-цифровых машин показана на рис. 103.

Машины с автоматической установкой исходных данных характеризуются высокой производительностью вычислительных операций.

Счетно-аналитические машины, состоящие из комплекта машин (перфоратора, контрольников, сортировщика и табулятора), предназначены для выполнения различных действий в механизации счета. Они основаны на применении перфорационного метода, при котором исходные данные пробивкой отверстий наносятся на перфорационные карты, которые соответственно обрабатываются*.

Электронные машины бывают универсальными или специального назначения**.

Суммирующие машины предназначены преимущественно для сложения и вычитания (подсобные операции — умножение и деление)***.

Малые вычислительные машины предназначены (см. стр. 342), главным образом, для умножения и деления (вспомогательные операции — сложение и вычитание).

Графики и номограммы представляют графическое изображение соответствующих функциональных зависимостей****).

---

* См. И. С. Евдокимов, Г. П. Евстигнеев, В. Н. Криушин. Счетные машины. Изд. 2, переработанное и дополненное. Машгиз. М., 1955, стр. 124 — 382.

** См. Н. А. Архангельский, Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины. Физматгиз, М., 1958.

С. А. Лебедев. Электронные вычислительные машины. АН СССР, М., 1956.

В. С. Михельсон. Элементы вычислительной математики. „Высшая школа", М., 1962, стр. 164—266.

*** См. И. С. Евдокимов, Г. П. Евстигнеев, В. Н. Криушин. Счетные машины. Изд. 2, переработанное и дополненное. Машгиз, М., 1955, стр. 60—122.

**** См. И. Н. Денисюк. Что такое номограмма и как ею пользоваться. ОНТИ, М. — Л., 1935; Справочник по номографии. Под ред. проф. Н. А. Глаголева. ОНТИ, М. — Л., 1937.

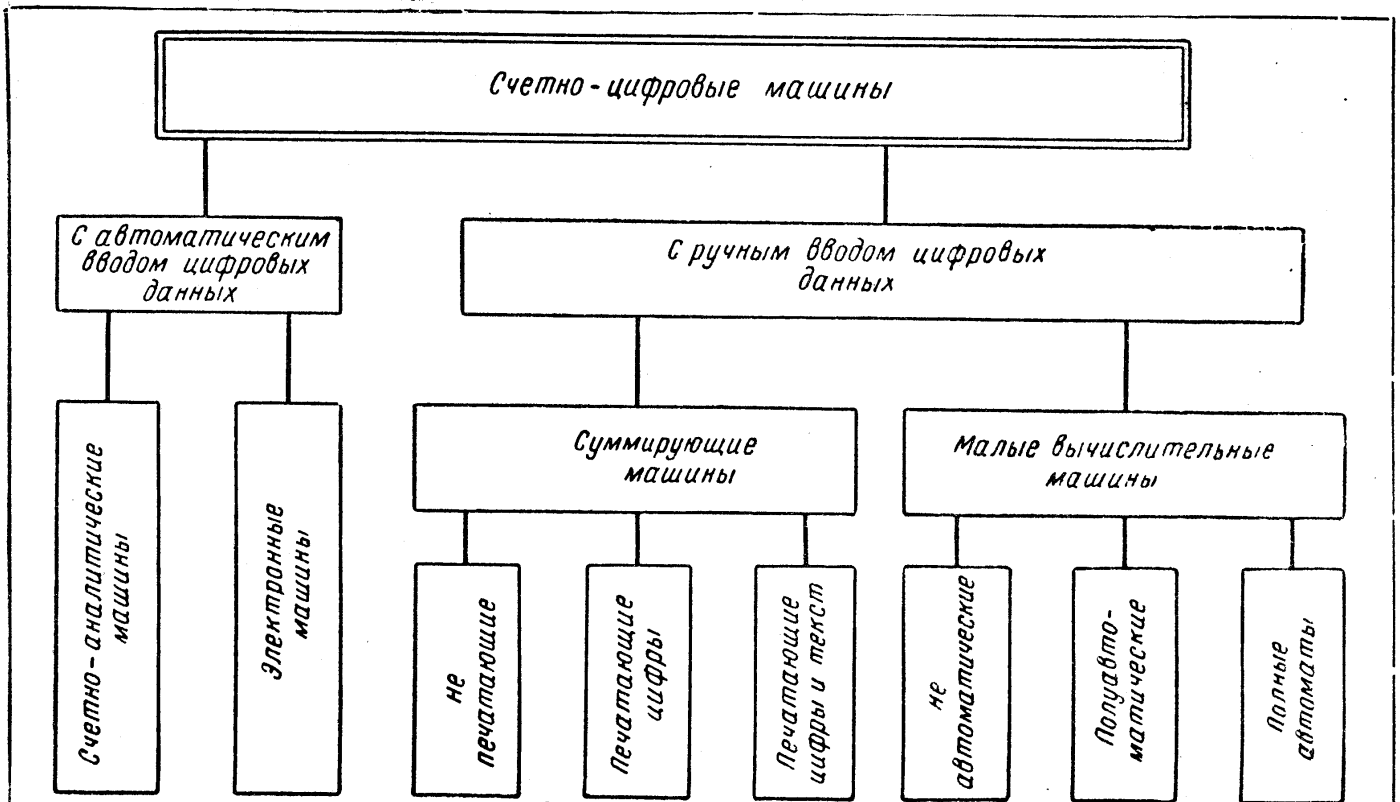


Рис. 103. Классификация счетно-цифровых машин

При выборе средств вычислений следует пользоваться теми, при которых искомые результаты можно получить в кратчайший срок и с необходимой точностью.

4. Таблицы. *Таблицы* — совокупность численных значений данной функции, соответствующих определенным, последовательно расположенным значениям аргумента (переменным).

Таблицы делят на общие и специальные. К общим относят таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций (см. табл. 15, 17—19), таблицы умножения и деления, таблицы элементарных функций — квадратов, кубов, корней квадратных и кубических, обратных величин (см. табл. 1), таблицы натуральных и обратных значений тригонометрических функций (см. табл. 21—24) и др.

К специальным относят таблицы, составленные для функций, употребляющихся, например, в различных инженерных расчетах и т. п.

Таблицы характеризуются *степенью точности* (числом десятичных знаков или значащих цифр), *пределами изменения аргумента, шагом* (ступенью — разностью между соседними табличными значениями аргумента).

По системе расположения материала в таблицах их различают с *двумя, тремя* и *четырьмя* входами в них, что часто связано с числом аргументов функции, для которой составлены таблицы.

Таблицы с одним входом содержат два рядом расположенных столбца: один для аргумента, а второй для значения функции. Однако для сокращения объема таблиц их составляют с двумя входами, как, например, таблицу 15 (стр. 407), содержащую мантиссы десятичных логарифмов чисел. Здесь десятки аргумента размещены в левом крайнем столбце, а единицы его — в верхней и нижней горизонтальных строках.

Пример. $\lg 144 = 2{,}1584$ (стр. 407). В этих таблицах для сокращения их формата первые цифры мантисс помещены лишь в столбце, озаглавленном 0.

Таблица 1 (стр. 369) является примером таблицы с одним входом. Для отыскания по ней необходимого значения (функции) заданного числа в крайней левой колонке находят это число (аргумент) и против него в столбце, соответствующем заданной функции, прочи-

тывают искомое значение. Например: $23^3 = 12\,167$ (стр. 369).

Примером таблиц с двумя входами являются „Таблицы умножения О' Рурка“ (см. стр. 334).

Если требуется определить численную величину функции для значения аргумента, находящегося между двумя рядом стоящими табличными его значениями, то прибегают к интерполированию („чтение таблиц между строк“), пользуясь табличными разностями.

Первая табличная разность — разность между значениями функции, соответствующими двум соседним значениям аргумента; вторая табличная разность — разность между двумя первыми соседними табличными разностями; третья табличная разность — разность между вторыми соседними табличными разностями и т. д.

Если вторые табличные разности получаются меньше четырех единиц последнего приведенного в таблицах знака, то ими можно пренебречь и пользоваться линейным интерполированием, применяя формулу

$$y = y_0 + \frac{n - n_0}{h}\,\Delta' = y_0 + t\Delta'.$$

Здесь y — искомое значение функции, y_0 — значение функции, данное в таблицах и соответствующее табличному аргументу n_0, n — заданное значение аргумента, находящееся между двумя рядом стоящими табличными аргументами n_0 и n_1, $h = (n_1 - n_0)$ — шаг таблиц, Δ' — первая табличная разность (разность первого порядка), а $t = \frac{n - n_0}{h}$.

Примеры: 1. Определить $\sqrt{4282}$.

Заданное значение аргумента 4282 находится между табличными аргументами 4280 и 4290 (стр. 386), следовательно, (см. колонку $\sqrt{10n}$).

$$y_0 = 65{,}42 + \frac{82 - 80}{10} \cdot 8 \approx 65{,}44.$$

Пример 2. Найти $\lg 9032$.

В табл. 15 (стр. 410) числу 903 соответствует мантисса 9557. Здесь же находим первую табличную разность $\Delta' = 557 - 552 = 5$ и замечаем, что с возрастанием аргумента мантисса логарифма возрастает. В табличке пропорциональных частей на этой же странице находим в левом крайнем столбце разность 5 и против нее в столбике, озаглавленном сверху 2, читаем $\Delta' = 1{,}0$.

Итак,

$$\lg 9032 = 3{,}9557 + 1 = 3{,}9558.$$

С двумя входами составлена и таблица 16 (стр. 413). Пользование ею разъяснено на следующем примере.

Пример 3. Дано $\lg x = 0{,}2418$; найти x.

Так как таблица 16 составлена только для мантисс с тремя значащими цифрами, то выписываем значения чисел для мантисс 0,241 и 0,242. Они находятся на пересечении строки 24 и столбцов, озаглавленных сверху 1 и 2: 1,742; 1,746.

Воспользуемся таблицей пропорциональных частей

$$\Delta = (1{,}746 - 1{,}742) \cdot 1000 = 4.$$

Этому значению Δ для 8 единиц в последнем знаке $\lg x$ соответствует поправка 3,2 (единиц последнего знака x).

Так как $\lg x$ — функция возрастающая, то

$$x = 1{,}742 + 0{,}003 = 1{,}745.$$

Пример 4. Найти $\lg \operatorname{tg} 42°28'$.

В табл. 17 (стр. 428) находим значение $\lg \operatorname{tg} 42°20' = 9{,}9595$; здесь же, правее и ниже этого числа, находим табличную разность 26 и замечаем, что с возрастанием аргумента $\lg \operatorname{tg} \alpha$ возрастает. В табличке пропорциональных частей на этой же странице находим $\Delta' = 26$ (левый крайний столбец) и в столбике, озаглавленном сверху 8, читаем 20,8. Итак,

$$\lg \operatorname{tg} 42°28' = 9{,}9595 + 21 = 9{,}9616.$$

Наиболее употребительные таблицы (общие)

1. О'Рурк А. Н. Таблицы умножения. Госстатиздат. М., 1953.
2. Митропольский А. К. Краткие математические таблицы. Физматгиз. 1962.
3. Милн-Томсон Л. М., Комри Л. Дж. Четырехзначные математические таблицы. Под редакцией К. А. Семендяева. Изд. 2-е, „Наука" 1964.

4. Таблицы Барлоу — квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел до 12 500. Изд. иностранной литературы. М., 1950.

5. Пятизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций. Издание третье. Геодезиздат. М., 1960.

6. Бремикер К. Логарифмо-тригонометрические таблицы с шестью десятичными знаками. Под ред. и с дополнением проф. Л. С. Хренова. Физматгиз. М., 1962.

7. Вега Г. Таблицы семизначных логарифмов. Издание третье. Геодезиздат. М., 1962.

8. Хренов Л. С. Пятизначные таблицы тригонометрических функций. Издание четвертое. Физматгиз. М., 1962.

9. Хренов Л. С. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. изд. 2-е, „Наука", 1964.

10. Хренов Л. С. Семизначные таблицы тригонометрических функций. Изд. 2-е. Гостехиздат. М., 1956.

Примечание. В описаниях таблиц приводятся правила пользования ими.

Литература о таблицах

Лебедев А. В. и Федорова Р. М. Справочник по математическим таблицам. АН СССР. М., 1956.

Бурунова Н. М. Справочник по математическим таблицам. Дополнение № 1. АН СССР. М., 1959.

Таблицы для вычислений следует выбирать лишь с необходимой и достаточной точностью, что зависит от точности исходных данных и результатов вычислений.

5. Счеты*. Из приборов, применяемых для вычислений, особенно широко распространены русские счеты, являющиеся простейшим примером предметного счета. Счеты (рис. 104) устроены по принципу десятичной системы счисления, главным образом механизируют выполнение действий сложения и вычитания (на них можно производить и другие арифметические действия, но с меньшей производительностью).

На счетах ряды косточек начиная с 5-го и выше служат для откладывания единиц, десятков (6-й ряд), сотен (7-й ряд) и т. д.; здесь каждый последующий ряд косточек служит для счета единиц смежного высшего разряда. А косточки 2 и 3-го рядов, отделенных от верхних неполным рядом (4-м), предназначены для действия с десятичными дробями, например при подсчете расстояний или площадей.

---

* Подробнее см. Кононенко А. И. Техника вычислений на счетах. Харьков, 1955.

При вычислениях с угловыми единицами нижние ряды косточек — 3 и 2-й служат для откладывания соответственно десятков и единиц, минут или секунд; если эти ряды используются для минут, то единицы градусов откладываются на 5-м ряду косточек, а если

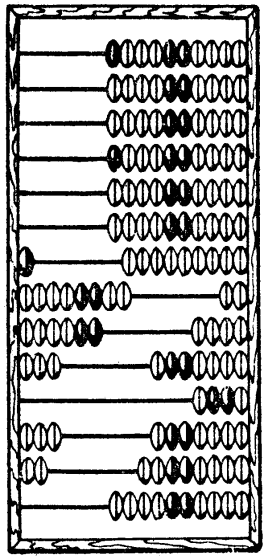


Рис. 104. На счетах положено 1863, 32

на 2 и 3-м рядах откладывают секунды, то минутам отводят ряды 5 и 6-й, а единицы градусов откладывают на 7-м ряду. Используя соответствующие ряды косточек для десятков минут или десятков секунд, следует помнить, что в этих случаях каждые шесть десятков минут соответствуют одному градусу, а шесть десятков секунд — одной минуте.

Неполный ряд косточек (4-й) может быть использован для подсчета четвертных долей соответственно минут и градусов.

Для удобства отсчета, и особенно при вычислениях с угловыми единицами, в каждом ряду две косточки (5 и 6-я) и первые косточки рядов, на которых откладываются целые тысячи (8-й ряд) и миллионы (11-й ряд), окрашены в более темный против остальных косточек цвет.

На счетах действие сложения и вычитания начинается всегда с единиц высшего разряда. При этом может оказаться, что сумма двух однозначных слагае-

мых будет больше 10. В этом случае вместо второго слагаемого откладывают (передвигают по проволоке справа налево) одну единицу (одну косточку) следующего высшего разряда, а разницу между этой единицей и вторым слагаемым (т. е. дополнение второго слагаемого до 10) сбрасывают (передвигают слева направо) с отложенного на счетах первого слагаемого.

При сложении на счетах многозначных чисел вначале полностью откладывают первое слагаемое (с учетом соответствующих разрядов косточек), затем, пользуясь правилом сложения однозначных чисел, к одноименным разрядам первого слагаемого последовательно, начиная с единиц высшего разряда, прибавляют числа каждого разряда второго слагаемого.

При вычитании пользуются приемами, обратными тем, какими пользуются при сложении.

Умножение на счетах, которое сводится к повторному сложению множимого, целесообразно производить только в том случае, если один из сомножителей имеет не более 2-3 значащих цифр и сумма их небольшая.

Деление чисел на счетах выгодно производить, если делитель равен 2 или 2^n. Деление числа всегда начинают с его младших разрядов, сбрасывая (переводя слева направо) половину отложенных косточек (делимого). При этом если на каком-либо разряде делимого будет нечетное число (нечетное число косточек), то в этом разряде сбрасывают число косточек больше половины их на одну, а на соседнем нижнем разряде прибавляют 5 косточек.

6. Логарифмическая линейка*. Логарифмическая (счетная) линейка служит для выполнения механическим путем различных действий (умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, определения натуральных значений тригонометрических функций заданных углов, и, наоборот, по заданным натуральным значениям функций можно находить соответствующие им углы, определять логарифмы и антилогарифмы чисел и тригонометрических функций и производить различные комбинированные вычисления).

Точность вычислений на логарифмической линейке зависит от длины ее шкал: на обычной линейке длиной

* Подробнее см. Панов Д. Ю. Счетная линейка. Изд. 16. Физматгиз, М., 1962.

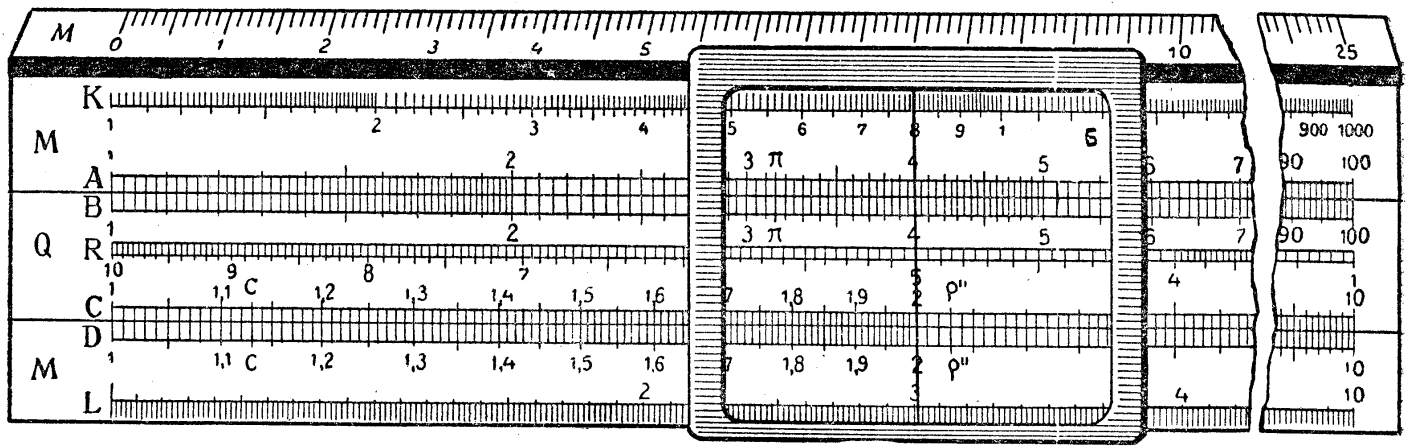


Рис. 105

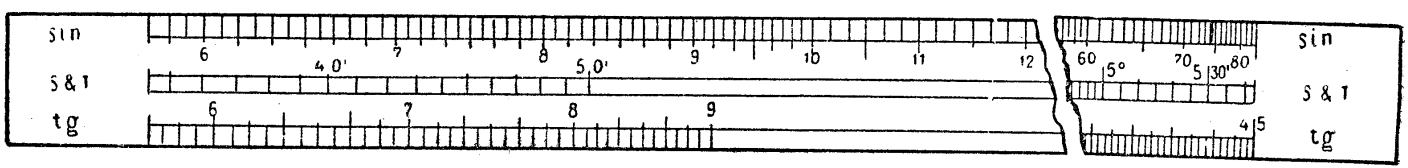


Рис. 106

в 25 *см* (рис. 105) можно получать результаты с 4 — 3 значащими цифрами с ошибкой не более единицы последнего знака.

Логарифмическая линейка (см. рис. 105) состоит из трех частей: 1) корпуса *M*, имеющего продольный паз, 2) движка *Q*, перемещающегося в пазу корпуса, и 3) бегунка *Б*, удерживаемого на линейке соприкасающейся с ее корпусом пружинкой и состоящего из прямоугольной металлической рамки со стеклом, на середине которого нанесена тонкая черта — указатель (визир).

Сверху на корпусе линейки, покрытом белым целлулоидом, нанесены 4 шкалы; кроме того, на вертикальном и на скошенном боках линейки нанесены две измерительные шкалы.

На движке нанесено 6 шкал, по 3 на каждой стороне.

Все шкалы на лицевой стороне и на скошенном крае и на движке имеют одинаковую длину в 250 *мм*.

На лицевой стороне корпуса линейки верхняя шкала *K* (кубическая) и следующая за ней шкала *A* (квадратичная) служат для вычисления соответственно кубов и квадратов чисел, нанесенных на третьей сверху шкале *D*. Мантиссы логарифмов чисел шкалы *D* нанесены на нижней шкале линейки *L*, которая заменяет собой трехзначную таблицу мантисс логарифмов чисел и является единственной из 4-х на лицевой стороне, равномерной шкалой на линейке, разделенной на полумиллиметры; остальные шкалы неравномерные — логарифмические.

На шкале *L* наименьшее деление соответствует 0,002, а метки, обозначенные на этой шкале цифрами 2, 3, 4, . . ., читаются как 0,2; 0,3; 0,4 и т. д.

Шкала *D* на корпусе линейки и шкала *C* на движке, называемые основными шкалами линейки, состоят каждая из трех участков, на концах которых стоят 1 и 2; 2 и 4; 4 и 10. Каждый такой участок разделен неравномерно, а пропорционально логарифмам ($m \lg a$) соответствующих чисел, но уменьшенным в 4 раза, так как длина всей шкалы равна 0,25 *м*, а не 1 *м* (т. е. $m \lg a = 250 \lg a$ при a от 1 до 10). Поэтому на этих шкалах каждое наименьшее деление на участке 1 — 2 означает 0,01 (сотые доли), на участке 2 — 4 — 0,02, а на участке 4 — 10 — уже 0,05.

На линейке шкала кубов *K*, являясь также логарифмической ($m \lg a$), построена с модулем $m = (250:3)$ *мм*

и для d от 1 до 1000; она состоит из трех участков, на концах которых поставлены цифры 1. На ее первом участке (левый крайний) наименьшее деление (цена одного деления) в интервале 1—2 равно 0,02, в интервале 2—5 равно 0,05 и в интервале 5—1(10) равно 0,1. На ее втором участке (среднем) в интервалах 1(10)—2(20), 2(20)—5(50) и 5(50)—1(100) наименьшее деление равно соответственно 0,2, 0,5 и 1. На третьем участке (правом крайнем) в интервалах 1(100)—2(200), 2(200)—5(500) и 5(500)—1(1000) наименьшие деления соответственно равны 2, 5 и 10.

Шкала квадратов A на линейке и точно такая же шкала логарифмов B ($m \lg c$) верхняя на движке Q построены каждая с модулем $m = (250 : 2)$ *мм* для значений c от 1 до 100 и состоят из двух одинаковых частей, оцифрованных по концам 1—10 и 10—100. На этих шкалах цена одного деления в интервале 1—2 равна 0,02, в интервале 2—5 равна 0,05 и в интервале 5—10 равна 0,1, а на втором участке в интервалах 10—20, 20—50 и 50—100 равна соответственно 0,2, 0,5 и 1.

На лицевой стороне движка между двумя шкалами делений B и C нанесена средняя шкала R (см. рис. 105)— шкала обратных значений. Она представляет собой ту же шкалу $C(D)$, но только в перевернутом виде, т. е. метка 10 поставлена на ее левом, а метка 1 на правом конце; на этой шкале отрезок от ее левого конца до любой метки, например до метки p, равняется $250 - 250 \lg p = 250 \lg (1 : p)$.

На обратной стороне движка нанесены три логарифмические шкалы (рис. 106), предназначенные для вычислений с тригонометрическими функциями.

Уравнения этих шкал следующие:

для шкалы sin ... $y = K(\lg \sin \alpha_S + 1)$;

для шкалы S и T ... $y = K\,[\lg^1/_2 (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha) + 2]$;

для шкалы tg ... $y = K(\lg \operatorname{tg} \alpha_t + 1)$,

где α_S и α_t обозначают пометки углов, соответствующие шкалам. Из них на верхней шкале „sin“ нанесены от начальной точки в масштабе основной шкалы логарифмы синусов углов от 5°43′,77 до 90° и надписаны соответствующие им углы.

На нижней шкале „tg“ нанесены, как и на верхней, но только логарифмы тангенсов углов от 5°43′,77 до 45°, а подписаны соответствующие им углы.

На средней шкале „S и T“ — шкале синусов и тангенсов нанесены от начальной точки, как и на крайних шкалах, логарифмы этих функций для значений малых углов от 0°34′,38 до 5°43′,77 и подписаны значения соответствующих им углов.

Для каждой из этих шкал значения углов выбраны так, что значение функции крайнего правого отсчета в десять раз больше значения той же функции для начального левого отсчета; действительно:

$$\sin 0°34',38 \approx \operatorname{tg} 0°34',38 \approx 0{,}01000;$$

$$\sin 5°43',77 \approx \operatorname{tg} 5°43',77 \approx 0{,}1000;$$

$$\sin 90° = 1{,}000, \text{ а } \operatorname{tg} 45° = 1{,}000.$$

Следовательно, шкалы „sin“ и „tg“ содержат углы, синусы и тангенсы которых меняются в пределах от 0,1 до 1, а средняя шкала „S и T“ — углы, синусы (тангенсы) которых меняются в пределах от 0,01 до 0,1.

На шкале „sin“ на участке от ее начала до 10° наименьшее деление соответствует 5′, на участке 10 — 20° оно равно 10′ и на участке 20 — 90° оно равно 20′.

На шкале „tg“ наименьшие деления в 5 и 10′ имеют участки ее, соответствующие углам в пределах 0 — 20° и 20 — 45°.

На средней шкале („S и T“) наименьшее деление на участке до 3° соответствует 1′, а от 3° и дальше — 2′.

Такое сочетание шкал, нанесенных на лицевой стороне линейки и на двух сторонах движка, позволяет, пользуясь ими, производить самые различные вычисления.

И, наконец, на некоторых шкалах лицевой стороны линейки и на одноименных шкалах движка особыми штрихами отмечены константы: π, $M = 1 : \pi$, $C = \sqrt{4 : \pi}$,

$$C_1 = \sqrt{40 : \pi},\ \rho°,\ \rho',\ \rho''\ \text{и}\ e'',$$

часто встречающиеся при различных расчетах.

Пользуясь шкалами лицевой стороны линейки (для удобства следует выдвинуть движок, из пазов линейки), можно при помощи одной установки указателя

бегунка получить сразу 4 результата — число на основной шкале D, мантиссу его логарифма на нижней шкале L и соответственно на шкалах A и K квадрат и куб этого числа.

Если установить указатель бегунка, например, на шкале кубов или квадратов, то можно по этому указателю прочитать на шкалах кубический или квадратный корень на основной шкале и логарифм этого корня на нижней шкале линейки.

Примеры.

1. Требуется вычислить $x = 32{,}4 \times 23$.

В этом случае необходимо на линейке сложить два данных числа (32,4 и 23), пользуясь шкалами D и C.

Для этого указатель бегунка устанавливается на шкале D на деление 32,4, а передвижением движка вправо подводят левую крайнюю цифру 1, написанную на его шкале C под указатель. Затем бегунок переводят вправо, устанавливая его указатель на деление 23 шкалы C и после этого по указателю прочитывают на основной шкале линейки D ответ — число 745, т. е. $x \approx 745$.

2. Требуется вычислить $y = 6{,}44 : 2{,}19$.

Для этого ставят указатель бегунка на деление 6,44 основной шкалы D линейки и, перемещая движок влево, подводят под указатель деление 219 шкалы C движка. После этого совмещают указатель бегунка с левой крайней цифрой 1, нанесенной на шкале C движка. Теперь остается прочитать на основной шкале (D) линейки искомый ответ; в нашем случае $y \approx 2{,}94$.

3. Вычислить $z = \dfrac{2{,}17 \times 3{,}81}{4{,}35}$.

Указателем бегунка левую крайнюю цифру 1 на шкале C совмещают с делением 2,17 на шкале D. Указатель бегунка ставят на деление 381 шкалы C и подводят под указатель штрих 4,35 шкалы C. Против левой крайней цифры 1 шкалы C прочитывают на шкале D ответ:

$$z \approx 1{,}90.$$

7. Малые вычислительные машины*. *Арифмометр „Феликс"* (рис. 107) позволяет производить все

* См. Л. С. Хренов. Малые вычислительные машины. Краткое справочное руководство. Изд. 3, переработанное. Физматгиз, М., 1963.

четыре арифметических действия и извлекать квадратные корни.

Умножение сводится к последовательному суммированию, т. е. к поразрядной передаче в счетчик результатов множимого столько раз, сколько единиц содер-

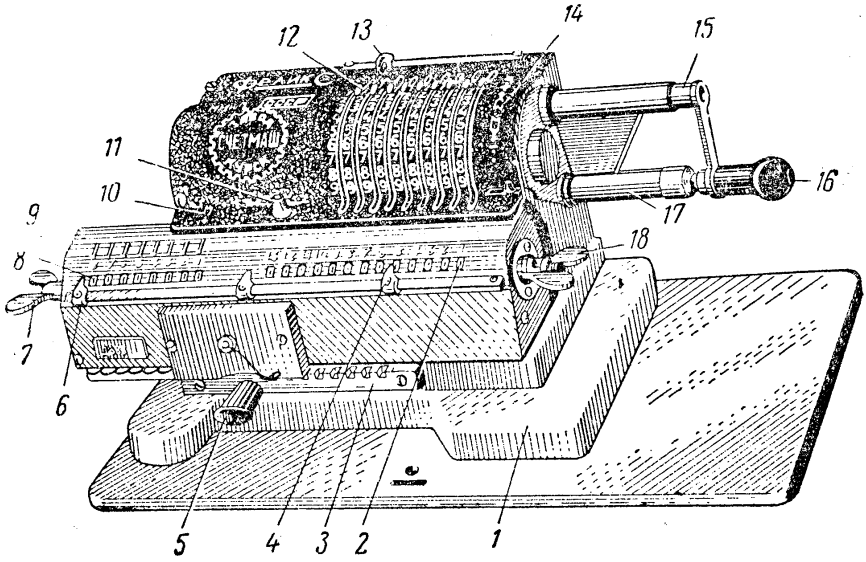


Рис. 107. Арифмометр «Феликс»:
1 — постамент; *2* — окна счетчика результатов; *3* — зубчатая планка для передвижения каретки; *4* — передвижная запятая счетчика результатов; *5* — рычаг для передвижения каретки; *6* — передвижная запятая счетчика оборотов; *7* — гасительный барашек счетчика оборотов; *8* — окна счетчика оборотов; *9* — передвижная каретка; *10* — стрелка для указания положения каретки; *11* — кнопка гасительной гребенки рычажков; *12* — установочные рычажки; *13* — передвижная запятая для рычажков; *14* — стрелки-указатели положительного (×+вверх) и отрицательного (—: вниз) действия; *15* — главный вращающийся вал, *16* — оперативная рукоятка; *17* — кронштейн для оперативной рукоятки; *18* — гасительный барашек счетчика результатов

жится в каждом разряде множителя, а действие деления — к последовательному вычитанию, или к способу умножения делимого на величину, обратную делителю, или, наконец, к способу подбора делимого.

Перед вычислением на арифмометре производится его проверка. Для этого на барабане устанавливают начиная с восьмого разряда число 12 345 679, которое умножают на 9, потом на 99, на 999 и т. д. После

таких умножений должны быть получены произведения, показанные в следующей таблице:

На барабане	На счетчике оборотов	На счетчике результатов
12 345 679	9	111 111 111
12 345 679	99	1 222 222 221
12 345 679	999	12 333 333 321
12 345 679	9 999	123 444 444 321
12 345 679	99 999	1 234 555 554 321
12 345 679	999 999	2 345 666 654 321
12 345 679	9 999 999	3 456 777 654 321
12 345 679	99 999 999	4 567 887 654 321

При работе на арифмометре следует: 1) не вращать оперативную рукоятку *16* при незащелкнутых барашках *7* и *18*; 2) не пользоваться рычагом *5* для передвижения каретки, если оперативная рукоятка *16* не доведена до места (не защелкнута) или барашки *7* и *18* не защелкнуты; 3) не вращать ни оперативную рукоятку *16*, ни барашки *7* и *18* до тех пор, пока каретка находится между двумя разрядами; их можно вращать только в том случае, когда стрелка *10* находится против одной из вертикальных линий, идущих от цифр, нанесенных над окошками *8* счетчика оборотов; 4) если оперативной рукояткой *16* по инерции начали делать лишний оборот, то его надо довести до конца и только после этого сделать один оборот в противоположную сторону; в противном случае результат будет неверным.

Сложение и вычитание. Перед сложением чисел, как и перед другими арифметическими действиями, арифмометр необходимо привести в исходное положение. Для этого: 1) при помощи барашков *7* и *18* гасят числа на счетчиках, приводя их показания к нулю; 2) каретку *9* при помощи рычага *5* ставят в левое крайнее положение; в этом случае стрелка *10* окажется против вертикального штриха, находящегося над первым окошком счетчика оборотов *8*; 3) установочные рычажки *12* должны стоять против нулей, по-

казанных у прорезей. Исходное положение арифмометра показано на рис. 107.

Допустим, требуется вычислить

$$A = 8264 + 1307 - 490 = ?$$

Первое слагаемое (8264) при помощи установочных рычажков *12* набирают на барабане арифмометра и переносят на счетчик результатов. Для этого необходимо повернуть оперативную рукоятку *16* на один полный оборот в сторону от себя, т. е. по ходу часовой стрелки, показанной знаком „× +". Такой оборот оперативной рукоятки будем называть „плюс-оборотом" в отличие от „минус-оборота", когда оперативная рукоятка *16* вращается на себя, т. е. против хода часовой стрелки (в сторону „— : "). После одного плюс-оборота оперативной рукоятки в окошках счетчика результатов *2* покажется число 8264, а в первом окошке счетчика оборотов *8* цифра 1. После этого гасят число на установочном барабане, пользуясь кнопкой *11* и оперативной рукояткой *16*, набирают при помощи рычажков *12* второе слагаемое (1307) на барабане и делают еще один плюс-оборот рукояткой *16*. В окошках счетчика результатов появится число 9571, а в первом окошке счетчика оборотов *8* будет цифра 2. Гасят число 1307, поставленное до этого на установочном барабане, и набирают на барабане третье число (490) и делают один минус-оборот рукояткой *16*. Теперь в крайних окошках счетчика результатов будет искомый результат $A = 9081$. Так можно складывать любое число слагаемых, пока общая сумма не превысит емкости арифмометра, т. е. 13-разрядного счетчика результатов — числа 9 999 999 999 999.

Умножение. Допустим, требуется перемножить два числа: 491 на 23.

Вначале арифмометр устанавливают в исходное положение. Затем, в целях экономии времени, на его барабане, пользуясь установочными рычажками, следует поставить тот из двух сомножителей, сумма цифр (она оценивается на глаз) которого больше; в нашем примере устанавливают первый сомножитель, т. е. число 491. После этого оперативной рукояткой делают три плюс-оборота (от умножения на 3 в счетчике результатов появится число 1473, а в правом крайнем

окошке счетчика оборотов будет цифра 3). Затем рычагом *5* арифмометра переводят каретку вправо на один разряд (т. е. подводят под стрелку *10* второе справа окошко счетчика оборотов) и делают два плюс-оборота оперативной рукояткой. Теперь в счетчике оборотов будет второй сомножитель, т. е. 23, а в счетчике результатов прочитаем число 11 293, которое и будет искомым произведением.

Деление. Допустим, требуется разделить 72 576 на 432. При исходном положении арифмометра устанавливают на барабане, при помощи рычажков, делимое (72 576) и, делая один плюс-оборот оперативной рукояткой, переносят это число на счетчик результатов. После этого вращением барашка *7* гасят единицу в счетчике оборотов, а при помощи кнопки *11* и рукоятки *16* гасят рычажки. Затем на барабане арифмометра в тех же разрядах устанавливают рычажками делитель (432) и передвигают каретку вправо до тех пор, пока крайняя левая цифра делимого будет под крайней левой цифрой делителя*, и при таком положении каретки вращают оперативную рукоятку в сторону минус оборотов до тех пор, пока в счетчике результатов не появятся в высших разрядах (во всех левых окошках) девятки и не раздастся звонок, что будет при втором минус-обороте, т. е. когда из числа 293 на счетчике результатов в окошках *5*, *4* и *3* будут вычитать делитель. Это укажет на то, что оперативной рукояткой сделан один лишний минус-оборот. После этого оперативной рукояткой делают один плюс-оборот, что позволит восстановить остаток числа на счетчике результатов, где в крайних правых окошках вновь появится число 29 376**. После этого переводят каретку на один разряд влево (стрелка *10* будет над вторым окном счетчика оборотов) и оперативную рукоятку вновь вращают в сторону минус-оборотов до звонка (до появления девяток во всех левых окнах счетчика результатов); в нашем случае это будет на седьмом обороте, когда из числа 345 на счетчике результатов (в окошках

---

* Для нашего случая стрелка *10* должна быть против третьего окна счетчика оборотов *8*.

** Если при этом будет сделан не один лишний оборот, а два или больше, то корректировочных оборотов, т. е. в данном случае плюс-оборотов, надо сделать не один, а столько, чтобы были погашены в окнах счетчика результатов девятки, появившиеся слева от делимого.

4, *3* и *2*) вычитают делитель 432. Плюс-оборотом восстанавливают остаток и после этого опять переводят каретку влево на один разряд (в нашем случае в исходное положение), а оперативную рукоятку вращают в сторону минус-оборотов, пока во всех окошках счетчика результатов не появятся нули, что будет после восьмого минус-оборота. Если бы после этого сделать оперативной рукояткой еще один минус-оборот (девятый в разряде единиц), то в окошках счетчика результатов *2* вместо нулей появилось бы число 9 999 999 999 568.

После всех этих действий в правых крайних окошках счетчика оборотов прочитывается искомое частное, которое в нашем примере равно 168 (все цифры красные). Итак:

$$72\,576 : 432 = 168.$$

Для экономии времени следует так производить вычисления на арифмометре, чтобы обходиться по возможности без записи промежуточных результатов и без лишних установок на машинах исходных данных.

Допустим, требуется вычислить значение

$$n = \left[\left(\frac{126{,}9}{14{,}1}\right) \times 537 - (136 \times 9{,}2)\right].$$

Для решения этой задачи можно, например, поступить так. Поставить правыми крайними рычажками на барабане арифмометра делимое 126,9, отделить передвижными запятыми на барабане и счетчике оборотов по одному десятичному знаку и произвести обычным способом деление этого числа на 14,1. После деления на счетчике результатов будут нули, а на счетчике оборотов — частное 9. Погасив рычажки барабана, устанавливают на нем, с учетом передвижных запятых, множитель 537 и вращают оперативную рукоятку в сторону плюс-оборотов, пока в счетчике оборотов вместо 9 будет 0; на счетчике результатов получим число $4833 = (126{,}9 : 14{,}1) \times 537$. Вновь гасят рычажки и, пользуясь правыми крайними рычажками, устанавливают на барабане множимое 136 и умножают это число на 9,2, вращая оперативную рукоятку в сторону минус-оборотов, так как перед скобкой $(136 \times 9{,}2)$ стоит знак минус. В результате этих действий на счетчике результатов получим величину

$$n = 3581{,}8.$$

Вычислительная машина ВК-1. На рис. 108 показана десятиклавишная вычислительная машина, выпускаемая под маркой ВК-1.

Перед вычислениями на ВК-1 необходимо все механизмы ее привести в исходное положение. Для этого оперативная рукоятка *16* должна стоять вертикально и быть защелкнутой в кронштейне *15*, счетчики результатов и оборотов должны быть погашены (во всех окнах этих счетчиков должны быть нули), а установочный барабан должен находиться в крайнем правом положении.

При работе на ВК-1 следует помнить, что та часть механизмов, которая не участвует в работе, автоматически запирается. Так, например, после поворота оперативной рукоятки *16* или нажатия на клавишу поразрядного передвижения установленного числа *4* или *5* цифровые клавиши *3* установочной клавиатуры запираются, т. е. при нажатии не опускаются. При гашении того или иного счетчика оперативная рукоятка должна быть заблокирована. Если при нажатии на цифровую клавишу установочной клавиатуры она не опускается, значит она заблокирована; чтобы ее разблокировать, необходимо нажать на рычаг *17* (отвести его в сторону оперативной рукоятки).

Сложение и вычитание. Допустим, требуется определить

$$B = 12\,864 - 18{,}37 + 359\,819.$$

Эти действия начинают с приведения всех слагаемых к общему знаменателю, которым в данном случае будет 100, а правыми передвижными запятыми *10* и *7* отделяют с правой стороны на счетчике результатов и на счетчике контроля установленных чисел по два разряда (через отверстия в муфтах этих запятых должны быть видны цифры 2). После этого машину приводят в исходное положение и нажатием на соответствующие клавиши установочной клавитуры *3* набирают первое число (12 864,00), которое должно появиться в окошках счетчика *8*; при этом набор числа на клавиатуре производится слева направо, т. е. в той же последовательности, как и читается это число. Затем одним плюс-оборотом оперативной рукоятки *16* это слагаемое передается на

счетчик результатов *9*, в окошках которого будет число 12 864,00. После этого гасят цифры на установочном барабане, для чего рычаг *17* большим пальцем правой руки (а указательный должен лежать на кронштейне *15*) отводят в сторону оперативной рукоятки *16*, набирают на установочной клавитуре *3* число 18,37 и оперативной рукояткой делают один минус-оборот. В счетчике результатов *9* появится число 12 845,63. Погасив установочный барабан рычагом *17*, набирают на клавиатуре число 359 819,00 и делают оперативной

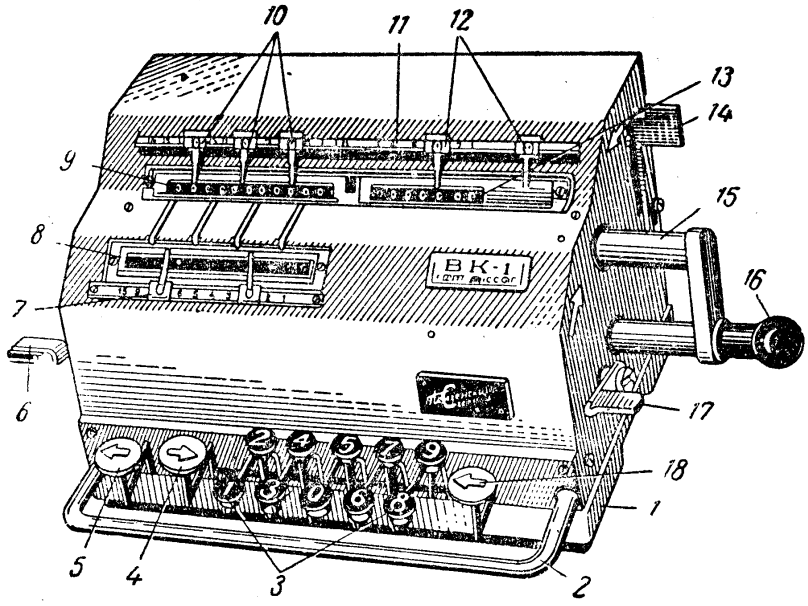


Рис. 108. Десятиклавишная вычислительная машина ВК-1:
1 — постамент; *2* — предохранительная скоба; *3* — цифровые клавиши (установочная клавиатура); *4* — клавиша поразрядного (однократного) передвижения установленного числа вправо; *5* — клавиша поразрядного (однократного) передвижения установленного числа влево; *6* — рычаг гашения счетчика результатов; *7* — передвижная запятая установленных чисел; *8* — окно контроля установленных чисел (указатель набора); *9* — окна счетчиков результатов; *10* — передвижные запятые счетчика результатов; *11* — планка перемещения запятых (указателей разрядов); *12* — передвижные запятые счетчика оборотов; *13* — окна счетчика оборотов; *14* — рычаг гашения счетчика оборотов; *15* — кронштейн оперативной рукоятки; *16* — оперативная рукоятка; *17* — рычаг гашения установленного числа на барабане; *18* — клавиша для быстрого отвода в крайнее левое положение набранного на клавиатуре числа.

рукояткой один плюс-оборот. В окошках счетчика результатов *9* будет результат

$$B = 372\,664{,}63.$$

Умножение и деление чисел на машине ВК-1 и ее проверка производятся так же, как и аналогичные действия на арифмометре „Феликс".

Вычислительная машина ВК-2. Эта машина (рис. 109) является полуавтоматом и предназначена для выполнения четырех арифметических действий; на ней только действие деление выполняется автоматически.

Перед вычислением на машине ВК-2 она должна быть при помощи вилки включена в штепсельную розетку и приведена в исходное положение — в окнах *14* и *18* должны быть нули, что достигается нажатием на рычаги *10* и *11* одновременно или на каждый отдельно; установочный барабан должен занимать правое крайнее положение; в окнах *13* должны быть нули, для чего нажимают на клавишу *21*; в сигнальном круге *19* должен находиться черный цвет, а рычаг *22* занимать верхнее положение.

Умножение. Это действие производится по принципу последовательного сложения. Перед умножением главный рычаг управления *8* должен быть поставлен в левое крайнее положение. При умножении чисел, например 4 817,12 на 3,64, поступают так: приведя машину в исходное положение, набирают при помощи клавиш *5* множимое 4 817,12. Убедившись в правильном его наборе (в контрольном окне *13*), приступают к умножению. Для этого нажимают пусковую клавишу *23* и держат ее нажатой до тех пор, пока в крайнем окне счетчика оборотов появится цифра 4 (правая крайняя цифра множителя). Как только клавиша *23* будет отпущена, умножение установленного клавишами *5* множимого в первом разряде прекратится и установочный барабан автоматически переместится влево на один разряд. Теперь вновь нажимают клавишу *23* и держат ее нажатой до тех пор, пока во втором окне счетчика оборотов появится цифра 6 (вторая цифра нашего множителя). После этих действий в счетчике результатов можно прочитать число 3 082,956 8, а в счетчике оборотов будет 0,64. И, наконец, отпустив клавишу *23*, вновь нажимают ее и держат нажатой, пока в третьем

окне появится цифра 3. На этом перемножение чисел будет закончено. В счетчике результатов прочитаем произведение $17\,534{,}316\,8 = 4\,817{,}12 \times 3{,}64$, в счетчике оборотов — множитель 3,64, а множимое 4 817,12 сохранится на установочном барабане (окно *13*).

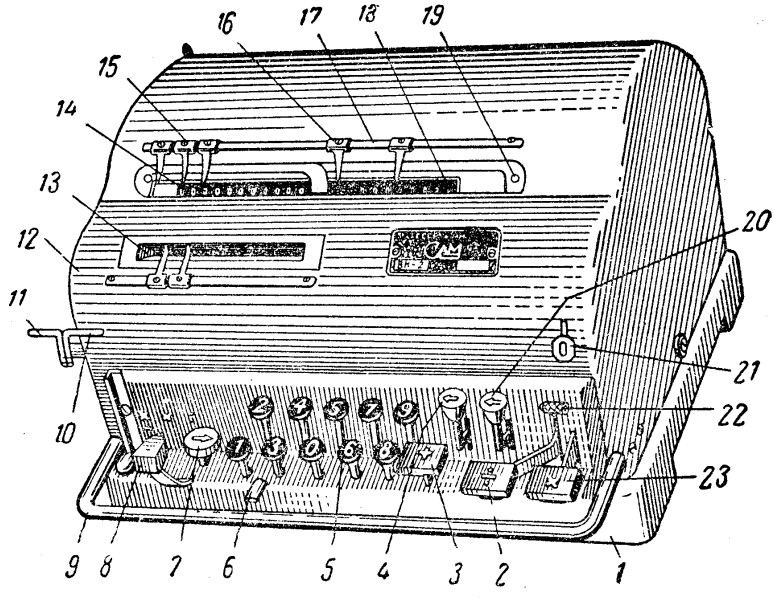


Рис. 109. Полуавтоматическая десятиклавишная вычислительная машина ВК-2:

1 — постамент; *2* — пусковая клавиша вычитания и автоматического деления; *3* — пусковая клавиша сложения; *4* — клавиша для быстрого отвода в крайнее левое положение установленного числа на барабане; *5* — установочная клавиатура (цифровые клавиши); *6* — переключатель движения установочного барабана при умножении; *7* — клавиша поразрядного (однократного) передвижения вправо установленного числа на барабане; *8* — главный рычаг управления; *9* — предохранительная скоба; *10* — рычаг гашения счетчика оборотов; *11* — рычаг гашения счетчика результатов; *12* — кнопка переключения (изменения) направления работы счетчика оборотов; *13* — окно контроля установленного числа (указатель набора); *14* — окна счетчика результатов; *15* и *16* — передвижные запятые счетчиков результатов и оборотов; *17* — планка для перемещения запятых — указателей разрядов; *18* — окна счетчика оборотов; *19* — сигнальный круг; *20* — клавиша поразрядного (однократного) передвижения влево установленного числа на барабане; *21* — клавиша гашения установленного числа на барабане (нулевая клавиша); *22* — рычаг включения автоматического гашения вычитаемого числа; *23* — пусковая клавиша умножения.

Если при умножении продержат лишнее время пусковую клавишу *23* и вместо, например, цифры 6 во втором окне счетчика оборотов будет цифра 8, то в этом случае при помощи клавиши *7* возвращают установочный барабан на один разряд вправо и нажимают клавишу *2* до тех пор, пока в окне второго разряда счетчика оборотов появится цифра 6.

Деление. Допустим, требуется вычислить разность двух частных $M = (2\,469{,}24 : 9) - (1\,248{,}38 : 14)$. В этом случае при исходном состоянии машины рычаг *8* ставят в правое положение и, пользуясь клавишами *5*, набирают делимое 2 469,24 и нажимают на клавишу *4*. Набирают на установочном барабане делитель 9 и, отведя этот барабан в левое крайнее положение, нажимают на пусковую клавишу *2*. После этого будет произведено автоматическое деление и в счетчике оборотов получим частное, равное 274,36.

Теперь остается разделить 1 248,38 на 14 и полученное частное вычесть из 274,36. Для этого гасят установочный барабан, набирают второе делимое (1 248,38) и отводят установочный барабан до отказа влево и передают делимое в счетчик результатов. Затем набирают второй делитель 14 и отводят барабан в левое крайнее положение. Так как по условию задачи второе частное надо вычесть из первого, то перед нажатием клавиши *2* для автоматического деления кнопку переключения *12* опускают вниз и отводят к себе. После этих действий в счетчике оборотов будет значение

$$M = 185{,}19.$$

Полноклавишная полуавтоматическая машина ВМП-2. Эта машина (рис. 110) имеет малогабаритный электродвигатель, работающий от переменного или постоянного тока с напряжением в местной сети от 110 до 220 вольт.

Перед включением штепселя машины ВМП-2 в электрическую розетку необходимо убедиться в соответствии напряжения и рода тока (постоянный или переменный) местной сети и установки электродвигателя, что достигается проверкой числа рабочих оборотов машины. Для этого включают штепсель машины в розетку местной электросети. Затем, одновременно с нажатием клавиши сложения *21*, отмечают время. По истечении одной

минуты счетчик оборотов *7* должен отметить 460—480 рабочих оборотов. При несоблюдении этого условия проверяют правильность соответствия включения электродвигателя напряжению местной сети. Для переключения электродвигателя на соответствующие ток и

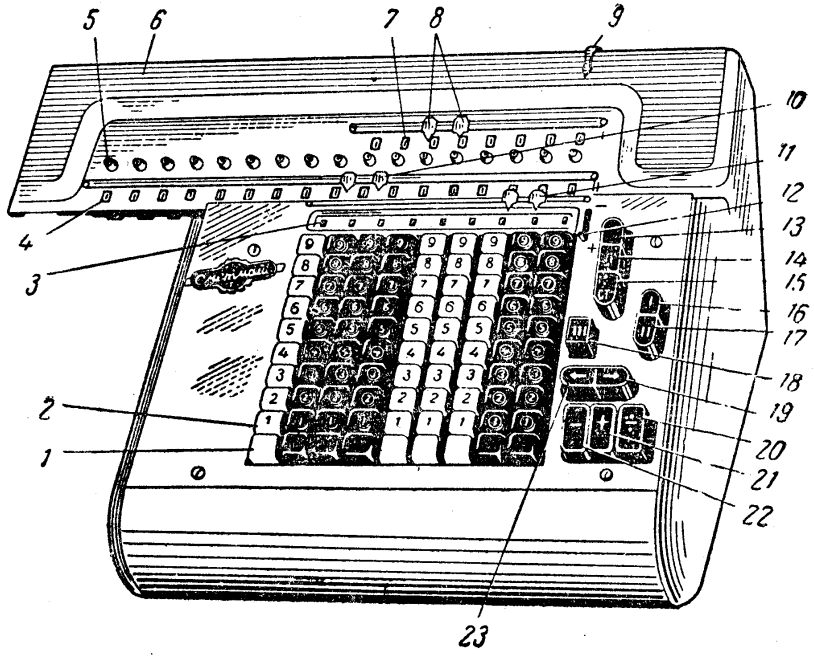


Рис. 110. Полноклавишная вычислительная полуавтоматическая машина ВМП-2:

1 — клавиши поразрядного гашения клавиатуры; *2* — установочная цифровая клавиатура; *3* — окна контроля установки чисел на клавиатуре; *4* — окна счетчика результатов; *5* — поворотные головки для установки чисел в счетчике результатов; *6* — каретка; *7* — окна счетчика оборотов; *8* — передвижные запятые счетчика оборотов; *9* — неподвижный указатель положения каретки; *10* — передвижные запятые счетчика результатов; *11* — передвижные запятые для установки чисел на клавиатуре; *12* — рычаг переключения действий счетчика оборотов; *13* — клавиша освобождения клавиши повторения; *14* — клавиша повторения П (закрепления набора); *15* — клавиша прерывания автоматического деления «ст»; *16* — клавиша гашения счетчика оборотов I; *17* — клавиша гашения счетчика результатов II; *18* — клавиша общего гашения клавиатуры III; *19* — клавиша поразрядного передвижения каретки вправо «→»; *20* — клавиша автоматического деления «÷»; *21* — клавиша сложения «+»; *22* — клавиша вычитания «—»; *23* — клавиша поразрядного передвижения каретки влево «←».

напряжение местной сети следует руководствоваться указаниями (схемой и таблицей), приведенными в паспорте к машине.

Электродвигатель машины начинает работать, когда после включения штепселя в розетку электросети нажата одна из клавиш управления, и он перестает работать (автоматически выключается), как только освобождена нажатая клавиша.

При наборе чисел в каждом вертикальном ряду клавиатуры *2* одновременно можно нажать только одну клавишу.

При однократном сложении и вычитании клавиша *14* должна быть поднята, а при умножении или делении и при многократном сложении или вычитании одних и тех же чисел — опущена.

Умножение. Пусть требуется найти произведение двух чисел: 21 731 × 9 786.

После того как машина приведена в исходное положение, нажимают (опускают) клавишу *14* и сохраняют ее в таком положении до полного окончания умножения. Затем на клавиатуре *2*, в ее пяти правых крайних рядах, нажимом до отказа на соответствующие клавиши набирают первый сомножитель 21 731 и проверяют его в контрольных окнах *3*. После этого нажимают клавишу *21* и держат ее в таком положении, пока в правом крайнем окне счетчика оборотов *7* появится цифра 6 — правая крайняя цифра второго сомножителя. Затем, нажимая на клавишу *19*, перемещают каретку *6* вправо на один разряд, в нашем случае неподвижный указатель *9* должен будет находиться под вторым справа окном счетчика *7*. После этого вновь нажимают клавишу *21* до тех пор, пока во втором окне счетчика оборотов появится цифра 8 (вторая крайняя цифры второго сомножителя). Затем нажимом на клавишу *19* перемещают каретку *6* на один разряд вправо и нажимают на клавишу *21* до появления в третьем справа окне *7* счетчика оборотов цифры 7. И наконец, перемещая при помощи клавиши *19* каретку *6* вправо еще на один разряд, нажимают на клавишу *21* до появления в четвертом справа окне счетчика оборотов цифры 9. После этого в окнах счетчика результатов прочитаем число

$$212\,659\,566 = 21\,731 \times 9\,786,$$

а в окнах *7* счетчика оборотов будет второй сомножитель 9 786.

Для гашения клавиатуры *2*, счетчиков *4* и *7* и клавиши 14 необходимо последовательно нажать соответственно клавиши *18*, *16*, *17* и *13*.

Деление. Пусть требуется разделить

$$6\,729{,}35 : 27{,}19 = ?$$

Для этого, начиная с высшего разряда цифровой клавиатуры *2*, набирают делимое 6 729,35, проверяют его в окнах контроля установки *3* и, нажимая на клавишу *21*, передают это делимое в счетчик результатов*. После этого, погасив при помощи клавиш *18* и *16* клавиатуру и счетчик оборотов, набирают в высших разрядах клавиатуры *2* делитель 27,19 так, чтобы крайняя левая цифра делителя была под крайней левой цифрой делимого. Теперь остается установить место запятой *8*, отделяющей целую часть числа от дробной в частном, которое после окончания действия деления прочитывают в окнах счетчика оборотов *7*. Для этого, отделив запятыми *10* и *11* десятичные знаки в установленных на машине соответственно в делимом и делителе, подсчитать k_a число всех десятичных знаков (разрядов) справа от установленной запятой *10* в делимом и k_b — число всех десятичных знаков (разрядов) справа от запятой *11* в делителе. Тогда k — число десятичных знаков (разрядов) в частном справа от запятой на счетчике оборотов *7* будет

$$k = k_a - k_b.$$

Для нашего примера при установке делимого 6729,35 в счетчике результатов *4* после запятой будет 12 разрядов ($k_a = 12$), а при установке делителя 27,19 после запятой будет 7 разрядов ($k_b = 7$). Следовательно, согласно приведенной формуле $k = 12 - 7 = 5$. Поэтому в нашем случае передвижную запятую *8* в счетчике результатов ставим между 5 и 6 разрядами (окнами).

И, наконец, после установки запятой *8* в частном, нажимают на клавишу деления *20* и машина автоматически произведет деление. По окончании деления машина останавливается и одновременно гасится цифровая клавиатура *2*.

---

* Делимое в счетчике результатов может быть установлено поворотом головок *5*.

В окнах счетчика оборотов *7* прочитывают с точностью до 0,01 частное

$$247{,}49 = 6729{,}35 : 27{,}19.$$

Примечание. При помощи клавиши *15* можно процесс автоматического деления прервать на любом разряде. Для этого достаточно нажать клавиши *15* тогда, когда машина работает в разряде, в котором необходимо прекратить автоматическое деление и держать эту клавишу нажатой до остановки машины.

Клавишей *15* пользуются и в том случае, когда клавиша автоматического деления *20* была нажата до установки делителя.

Полноклавишная машина-автомат ВММ-2. Эта машина (рис. 111), являющаяся полным автоматом, предназначена главным образом для умножения и деления чисел; на ней удобно производить и различные комбинированные арифметические вычисления.

Автомат ВММ-2 имеет универсальный электромотор, который работает как от постоянного, так и от переменного тока напряжением в пределах 110—220 вольт.

Перед вычислением на автомате ВММ-2 каретка *6* должна занимать крайнее левое положение, рычаги *17* и *18* должны быть опущены вниз, а рычаг *5* — находиться в верхнем положении.

Умножение и возведение в степень. Для умножения чисел множимое набирают на установочной клавиатуре *32*, а множитель — на десятиклавишном мультипликаторе *1*.

Пример 1. Требуется вычислить

$$A = (217 \times 63) - (35 \times 17).$$

В этом случае на установочной клавиатуре *32*, пользуясь правыми крайними клавишами, набирают множимое 217, а на мультипликаторе *1* — множитель 63 и нажимают клавишу умножения *34*. В счетчике результатов будет получено произведение 13 671. После этого рычаг *17* отводят вверх, на клавиатуре *32* набирают множимое 35, а на клавиатуре *1* — множитель 17 и нажимают клавишу *2*. В результате этих действий получают искомую величину

$$A = 13\,076.$$

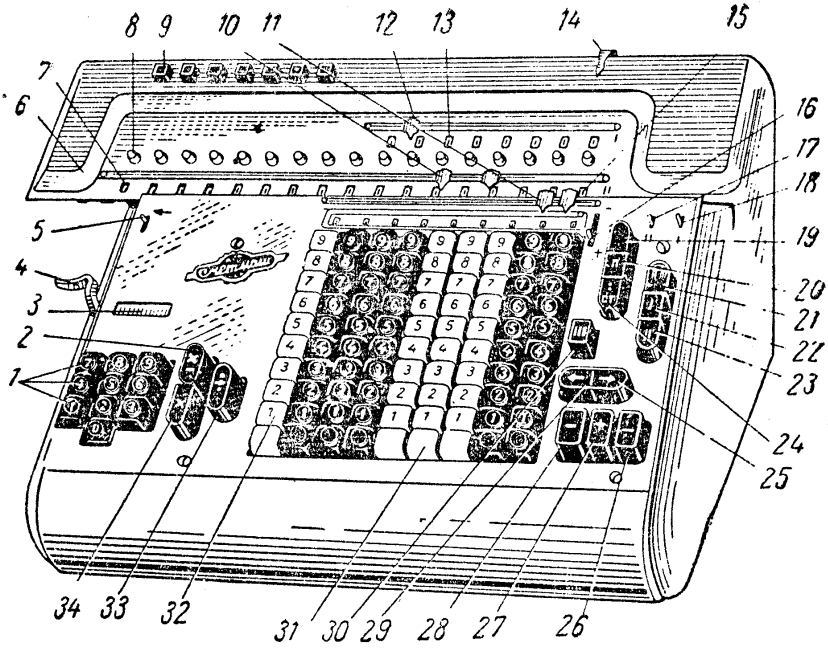


Рис. 111. Полноклавишная вычислительная машина ВММ-2: *1* — клавиатура для установки множителя; *2* — клавиша отрицательного умножения (вычитания произведения) «×»; *3* — окно контроля установленного множителя на клавиатуре 1; *4* — рычаг гашения множителя; *5* — рычаг выключения возврата (обратного хода) каретки после умножения; *6* — каретка; *7* — окна счетчика результатов; *8* — поворотные головки для установки числа непосредственно в счетчике результатов; *9* — клавиши ограничителя движения каретки при делении; *10, 11, 12* — передвижные запятые соответственно счетчика результатов, контрольных окошек установочной клавиатуры и счетчика оборотов; *13* — окна счетчика оборотов; *14* — неподвижный указатель положения каретки; *15* — контрольные окна установочного числа на клавиатуре; *16* — переключатель счетчика оборотов; *17* — выключатель автоматического гашения счетчика результатов; *18* — выключатель автоматического гашения счетчика оборотов; *19* — освободитель клавиши П; *20* — клавиша включения автоматического гашения установочной клавиатуры П; *21* — клавиша переноса числа из счетчика результатов в установочный механизм «II—III»; *22* — клавиша гашения счетчика оборотов I; *23* — клавиша гашения счетчика результатов II; *24* — клавиша прерывания автоматического деления «: стоп»; *25* — клавиша подачи каретки вправо «→»; *26* — клавиша автоматического деления «÷»; *27* — клавиша сложения «+»; *28* — клавиша вычитания «—»; *29* — клавиша подачи каретки влево «←»; *30* — клавиша общего гашения установочной клавиатуры III; *31* — клавиша поразрядного гашения установочной клавиатуры; *32* — установочная клавиатура; *33* — клавиша передачи (ввода) делимого в счетчик результатов «÷»; *34* — клавиша умножения «×».

Пример 2. Вычислить $B = 135^3$.

Решение этой задачи сводится к многократному перемножению основания степени 135, т. е. $B = 135 \times \times 135 \times 135$.

В этом случае при исходном положении машины основание степени 135 набирают на клавиатуре *32* и такое же число устанавливают на клавиатуре *1* и нажимают клавишу умножения *34*. После этого в счетчике результатов будет число $18\,225 = 135 \times 135 = 135^2$. Нажимая клавишу *21*, переносят это число из счетчика результатов *7* в установочный механизм *15*. Набирают на клавиатуре *1* число 135 и нажимают на клавишу *34*. В счетчике результатов будет получено число

$$B = 135^3 = 2\,460\,375 = 135 \times 135 \times 135.$$

Деление. Пусть надо вычислить

$$C = \frac{(67 \times 12) + (84 \times 15)}{(12 + 15)}$$

с точностью до 0,01.

Для решения этой задачи при исходном положении каретки *6*, рычаги *17* и *18* должны быть поставлены в верхнее положение. Затем обычным способом производят перемножение чисел 67 и 12. При этом множимое устанавливают в высших разрядах клавиатуры *33*, а так как результат C надо получить с точностью до 0,01, то на клавиатуре *1* устанавливают вместо числа 12 множитель 12,00. В результате такого умножения в счетчике результатов *7* будет получено произведение 804; правее этого числа в счетчике *7* будут стоять нули. Затем набирают на клавиатуре *32* множимое 84 (опять-таки пользуясь высшими разрядами ее), а на клавиатуре *1* — множитель 15,00 и, опустив рычаг *5* вниз, нажимают клавишу *34*. После этого каретка *6* останется в правом положении, в счетчике результатов будет сумма двух произведений $2\,064 = (67 \times 12) + + (84 \times 15)$, а в счетчике оборотов — сумма множителей $27 = 12 + 15$, которую, являющуюся теперь делителем, устанавливают в высших разрядах на клавиатуре *32* под числом 2 064 так, чтобы левая крайняя цифра делителя была под левой крайней цифрой делимого. Нажимают клавишу *22* для гашения счетчика

оборотов и клавишу деления *26*. По окончании деления в счетчике оборотов будет значение искомой величины C и остаток 0,12, находящийся в счетчике результатов.

Итак,

$$C = \frac{(67 \times 12) + (84 \times 15)}{(12 + 15)} = 76{,}44 \text{ и остаток } 0{,}12.$$

При вычислении на машине ВММ-2 выражений, в которые входят различные арифметические действия, следует располагать порядок этих действий так, чтобы не было лишних установок чисел на клавиатуре машины, и стремиться получить окончательные значения без записи промежуточных результатов.

Например, если требуется определить значение

$$A = (m - n) \times (p + q),$$

то перед вычислением его на машинах ВММ-2 следует это выражение записать так:

$$A = m(p + q) - n(p + q)$$

или

$$A = p(m - n) + q(m - n).$$

В этом случае, пользуясь клавиатурой *32*, набирают на ней, например, значение m, клавишей *27* передают его в счетчик результатов *7*, набирают значение n и после легкого удара по клавише *28* получают в счетчике результатов разность $(m - n)$, которую при помощи клавиши *21* передают в установочный механизм машины в качестве множимого. Затем на клавиатуре *1* набирают множитель p и, нажимая на клавишу *34*, производят умножение $(m - n)$ на p. После этого, поставив выключатель *17* в верхнее положение, набирают на клавиатуре *1* множитель q и нажимают на клавишу умножения *34*. По окончании этих действий в счетчике результатов *7* будет искомая величина A. При таком способе вычисления величины A будет минимальное количество установок чисел на клавиатурах и окончательное значение получается без записи промежуточных результатов.

Г. Графическое решение уравнений

1. Уравнение с одним неизвестным. Иногда удается данное уравнение $f(x) = 0$ представить в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, и тогда решение уравнения сводится к отысканию абсцисс точек пересечения кривых

$$y = \varphi_1(x) \text{ и } y = \varphi_2(x).$$

Пример. Решить уравнение $2^x = 4x$.

Строим кривую $y = 2^x$ и прямую $y = 4x$ и ищем точки пересечения их. На рис. 112 видно, что одним значением x является 4, другое находится между 0 и 1. На миллиметровой бумаге, выбрав соответственно масштабы, можно получить приближенное значение второго корня.

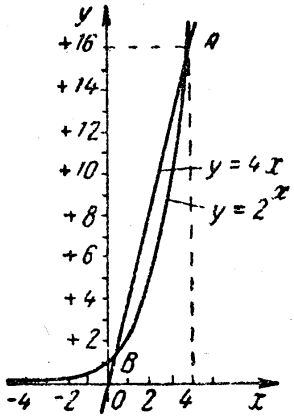


Рис. 112

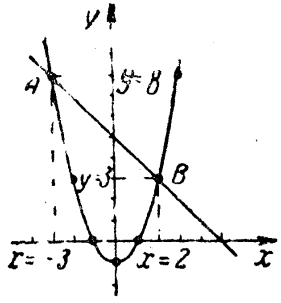


Рис. 113

2. Уравнение с двумя неизвестными. Если даны два уравнения $f_1(x; y) = 0$ и $f_2(x; y)$, то, рассматривая каждое из них как уравнение линии на плоскости, сводим задачу об отыскании x и y к нахождению абсцисс и ординат точек пересечения вышеуказанных линий.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5; \\ x^2 - y = 1. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений есть уравнение прямой, второе — уравнение параболы. Построив эти линии на чертеже, находят их точки пересечения, а затем и координаты этих точек (рис. 113).

Д. Графическое дифференцирование и интегрирование. Формулы для приближенного интегрирования

В ряде случаев функции даются графически и требуется найти их производные или интегралы. Ниже указывается, как следует поступить для решения таких задач.

1. Графическое дифференцирование. Построение графика производной по заданному графику функции называется *графическим дифференцированием.*

а) Разобьем участок AB графика функции $y = f(x)$ на несколько неравных частей прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, ... (на рис. 114 на 4 части). Проводим касательные к кривой в точках M_1, M_2, ... — серединах полученных участков кривой.

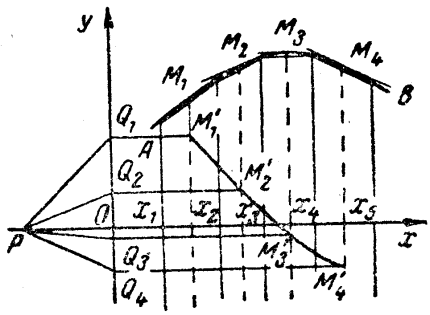


Рис. 114

б) На оси Ox влево от начала координат на расстоянии единицы масштаба строим точку P (полюс) и из нее проводим прямые PQ_1, PQ_2, PQ_3, ..., соответственно параллельные касательным к кривой в точках M_1, M_2, M_3, ... до пересечения с осью Oy.

в) Через полученные точки Q_1, Q_2, Q_3... проводим прямые, параллельные оси Ox. Точки M_1', M_2', M_3', ... пересечения этих прямых с соответствующими перпендикулярами, опущенными из точек M_1, M_2, M_3, ... на ось Ox, и являются точками графика производной.

2) Кривая $M_1'M_2'M_3'M_4'$ (рис. 114) является графиком функции $y = f'(x)$.

2. Приближенное вычисление определенных интегралов. Интервал интегрирования $[a, b]$ разбиваем на n равных частей; обозначаем точки деления через

$x_0 = a$; x_1; x_2; ...; x_{n-1}; $x_n = b$; вычисляем затем значения функции $y = f(x)$ в точках деления и обозначаем эти значения функции соответственно так: y_0; y_1; y_2; ...; ...; y_{n-2}; y_{n-1}; y_n. После выполнения указанной работы пользуемся одной из следующих трех формул:

Формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1}).$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Формула Симпсона (*формула парабол*) (здесь n обязательно число четное)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + (y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + \right.$$

$$\left. + 2(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right].$$

Все три формулы тем точнее, чем больше число n, на которое делится интервал $[a, b]$. При одном и том же числе n наименее точна формула прямоугольников и наиболее точна формула Симпсона. Погрешность формулы прямоугольников равна $\frac{\Delta x^2}{24}(b-a)\,M_2$, формулы трапеций равны $\frac{\Delta x^2}{12}(b-a)\,M_2$, формулы Симпсона равны $\frac{\Delta x^4}{180}(b-a)\,M_4$, где $M_2 \geqslant |f''(x)|$, а $M_4 \geqslant |f^{(IV)}(x)|$ на интервале $[a, b]$.

3. Графическое интегрирование. Если функция $y = f(x)$ задана графически на интервале $[a, b]$ (кривая MN на рис. 115), то можно найти графически и интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

который численно равен площади криволинейной трапеции $aMANb$ (см. стр. 286). Для этого по оси Ox влево от начала координат откладываем отрезок $OP = 1$ ед. масштаба. Точка P называется *полюсом*. Затем проводим прямую FG, параллельную оси Ox и пересекающую кривую $y = f(x)$ так, чтобы площади заштрихованных на рис. 115 криволинейных фигур AMF и ANG над и под кривой были приближенно равны между собой. Продолжаем прямую FG до пересечения с осью Oy в точке T, соединяем прямой

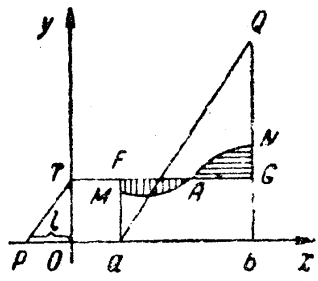


Рис. 115

линией полюс P с точкой T и из точки a проводим прямую, параллельную PT, до пересечения с прямой $x = b$ в точке Q. Отрезок bQ будет численно равен величине $\int_a^b f(x)\,dx$.

Если интервал $[a, b]$ не очень мал, то проведение на глаз прямой FG может привести к значительной ошибке. Поэтому в целях уточнения построения поступают следующим образом.

1. Разбивают интервал интегрирования $[a, b]$ на n частичных интервалов (не обязательно равных) точками деления $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Причем эти точки деления стараются обычно выбрать так, чтобы на каждом частичном интервале подынтегральная функция $f(x)$ была монотонной (рис. 116) и в число точек деления были включены все точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осью Ox. Чем больше точек деления, тем точнее результат.

2. В середине каждого частичного интервала (обозначим середины цифрами 1, 2, 3, ...) восставляют перпендикуляры к оси Ox, и через точки их пересечения с кривой $y = f(x)$ проводят прямые, параллельные оси Ox, до пересечения с осью Oy, в точках T_1, T_2, T_3, ... (цифры у буквы T соответствуют номеру ча-

стичного интервала). Точку P (полюс) соединяют прямыми с точками T_1, T_2, T_3, ...

3. В целях ясности чертежа строим новую систему координат, ось O_1y которой совпадает со старой

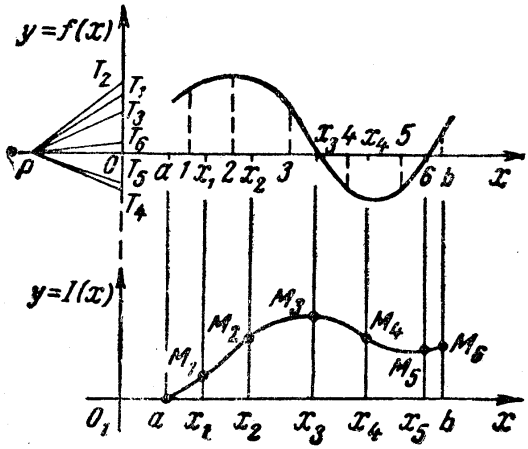


Рис. 116

осью Oy, а ось $O_1x \parallel Ox$. Наносим на оси O_1x точки a, x_1, x_2, ..., x_{n-1} (рис. 116). Затем из точки a проводим прямую, параллельную прямой PT_1, до пересечения с прямой $x = x_1$ в точке M_1, из точки M_1 проводим прямую, параллельную прямой PT_2, до пересечения с прямой $x = x_2$ в точке M_2 и т. д. В результате такого построения получим точки a, M_1, M_2, M_3, ..., M_n, причем отрезок x_1M_1 будет численно равен интегралу $\int_a^{x_1} f(x)\,dx$, отрезок x_2M_2 — интегралу $\int_a^{x_2} f(x)\,dx$, отрезок x_3M_3 — интегралу $\int_a^{x_3} f(x)\,dx$, отрезок bM_n — интегралу $\int_a^{b} f(x)\,dx$.

4. Соединяя плавной кривой точки a, M_1, M_2, ..., M_n, получим график одной из первообразных функций заданной функции $y = f(x)$, т. е. график так называемого интеграла с переменным верхним пределом (рис. 116):

$$I(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Е. Приближенное решение уравнений

1. Метод проб. Если требуется найти корни уравнения $f(x) = 0$, то эта задача может рассматриваться как нахождение точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс.

Если $f(x)$ — непрерывная функция и имеет противоположные знаки в точках x_1 и x_2, то между этими точками лежит точка x_3, в которой $f(x_3) = 0$, т. е. x_3 есть один из искомых корней уравнения. Например, пусть имеем:

$$f(x) = x^3 + 1{,}1\,x^2 + 0{,}9\,x - 1{,}4 = 0.$$

Замечаем, что $f(0) = -1{,}4$; $f(1) = 1{,}6$. Следовательно, между нулем и единицей имеется корень уравнения. Если внутри интервала $[x_1, x_2]$ находится единственный корень x_3 уравнения $f(x) = 0$, то интервал $[x_1, x_2]$ называется интервалом *изоляции* данного корня.

Далее производится „сужение" интервала изоляции корня.

Испытаем, например, $f(0{,}5)$ и $f(0{,}7)$; будем иметь $f(0{,}5) = -0{,}55$; $f(0{,}7) = 0{,}112$.

Значит корень лежит между 0,5 и 0,7. Таким образом, здесь можно приближенно принять за значение корня

$$x \approx \frac{0{,}5 + 0{,}7}{2} \approx 0{,}6.$$

Дальше это значение уточнится, получим $x = 0{,}675$ и т. д.

2. Метод хорд. Если на интервале изоляции корня график функции $y = f(x)$ заменить ее хордой, то точка пересечения хорды с осью абсцисс дает приближенное значение корня.

Если интервал изоляции есть $[x_1, x_2]$, то хорда имеет уравнение

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Полагая $y = 0$, находим абсциссу точки пересечения хорды с осью Ox:

$$x' = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}.$$

Пример. $f(x) = x^3 + 1{,}1\,x^2 + 0{,}9\,x - 1{,}4 = 0$. Интервал изоляции [0; 1], тогда

$$x' = 1 - \frac{f(1)}{\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}} = 1 - \frac{1{,}6}{1{,}6 + 1{,}4} \approx 0{,}467.$$

Если теперь взять интервал изоляции [0,467; 1], то

$$x'' = 1 - \frac{f(1)}{\frac{f(1) - f(0{,}467)}{1 - 0{,}467}} \approx 0{,}617.$$

Дальнейшие уточнения получаются аналогичным образом.

3. Метод касательных. Если на интервале изоляции заменить линию $y = f(x)$ ее касательной, то корень уравнения $f(x) = 0$ приближенно находится как абсцисса точки пересечения касательной к линии $y = f(x)$ с осью абсцисс.

Этот и более совершенные методы приближенного решения уравнения можно найти в курсах математического анализа.

ТАБЛИЦЫ

Таблица 1.

Степени, корни, длины окружностей, площади кругов и обратные величины*

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1,0000	3,162	1,0000	2,154	3,142	0,7854	—	—	—
2	4	8	4142	4,472	2599	2,714	6,283	3,142	500,0	0,7071	0,5000
3	9	27	7321	5,477	4422	3,107	9,425	7,069	333,3	5774	3333
4	16	64	2,000	6,325	5874	420	12,57	12,57	250,0	5000	2500
5	25	125	236	7,071	7100	684	15,71	19,64	200,0	4472	2000
6	36	216	2,449	7,746	1,8171	3,915	18,85	28,27	166,7	0,4082	0,1667
7	49	343	646	8,367	9129	4,121	21,99	38,48	142,9	3780	1429
8	64	512	828	8,944	2,000	309	25,13	50,27	125,0	3536	1250
9	81	729	3,000	9,487	080	481	28,27	63,62	111,1	3333	1111
10	100	1000	162	10,000	154	642	31,42	78,54	100,0	3162	1000
11	121	1331	3,317	10,49	2,224	4,791	34,56	95,03	90,91	0,3015	0,09091
12	144	1728	464	10,95	289	932	37,70	113,1	83,33	2887	8333
13	169	2197	606	11,40	351	5,066	40,84	132,7	76,92	2774	7692
14	196	2744	742	11,83	410	192	43,98	153,9	71,43	2673	7143
15	225	3375	873	12,25	466	313	47,12	176,7	66,67	2582	6667
16	256	4096	4,000	12,65	2,520	5,429	50,27	201,1	62,50	0,2500	0,06250
17	289	4913	123	13,04	571	540	53,41	227,0	58,82	2425	5882
18	324	5832	243	13,42	621	646	56,55	254,5	55,56	2357	5556
19	361	6859	359	13,78	668	749	59,69	283,5	52,63	2294	5263
20	400	8000	472	14,14	714	848	62,83	314,2	50,00	2236	5000
21	441	9261	4,583	14,49	2,759	5,944	65,97	346,4	47,62	0,2182	0,04762
22	484	10648	690	14,83	802	6,037	69,12	380,1	45,45	2132	4545
23	529	12167	796	15,17	844	127	72,26	415,5	43,48	2085	4348
24	576	13824	899	15,49	884	214	75,40	452,4	41,67	2041	4167
25	625	15625	5,000	15,81	924	300	78,54	490,9	40,00	2000	4000

[2] Способ пользования табл. 1 см. на стр. 332.

Продолжение табл. I

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
26	676	17 576	5,099	16,12	2,962	6,383	81,68	530,9	38,46	0,1961	0,03846
27	729	19 683	196	16,43	3,000	463	84,82	572,6	37,04	1925	3704
28	784	21 952	292	16,73	037	542	87,96	615,8	35,71	1890	3571
29	841	24 389	385	17,03	072	619	91,11	660,5	34,48	1857	3448
30	900	27 000	477	17,32	107	694	94,25	706,9	33,33	1826	3333
31	961	29 791	5,568	17,61	3,141	6,768	97,39	754,8	32,26	0,1796	0,03226
32	1024	32 768	657	17,89	175	840	100,5	804,2	31,25	1768	3125
33	1089	35 937	745	18,17	208	910	103,7	855,3	30,30	1741	3030
34	1156	39 304	831	18,44	240	980	106,8	907,9	29,41	1715	2941
35	1225	42 875	916	18,71	271	7,047	110,0	962,1	28,57	1690	2857
36	1296	46 656	6,000	18,97	3,302	7,114	113,1	1018	27,78	0,1667	0,02778
37	1369	50 653	083	19,24	332	179	116,2	1075	27,03	1644	2703
38	1444	54 872	164	19,49	362	243	119,4	1134	26,32	1622	2632
39	1521	59 319	245	19,75	391	306	122,5	1195	25,64	1601	2564
40	1600	64 000	325	20,00	420	368	125,7	1257	25,00	1581	2500
41	1681	68 921	6,403	20,25	3,448	7,429	128,8	1320	24,39	0,1562	0,02439
42	1764	74 088	481	20,49	476	489	131,9	1385	23,81	1543	2381
43	1849	79 507	557	20,74	503	548	135,1	1452	23,26	1525	2326
44	1936	85 184	633	20,98	530	606	138,2	1521	22,73	1508	2273
45	2025	91 125	708	21,21	557	663	141,4	1590	22,22	1491	2222
46	2116	97 336	6,782	21,45	3,583	7,719	144,5	1662	21,74	0,1474	0,02174
47	2209	103 823	856	21,68	609	775	147,7	1735	21,28	1459	2128
48	2304	110 592	928	21,91	634	830	150,8	1810	20,83	1443	2083
49	2401	117 649	7,000	22,14	659	884	153,9	1886	20,41	1429	2041
50	2500	125 000	071	22,36	684	937	157,1	1963	20,00	1414	2000

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
51	2601	132 651	7,141	22,58	3,708	7,990	160,3	2043	19,61	0,1400	0,01961
52	2704	140 608	211	22,80	733	8,041	163,5	2124	19,23	1387	1923
53	2809	148 877	280	23,02	756	093	166,5	2206	18,87	1374	1887
54	2916	157 464	348	23,24	780	143	169,6	2290	18,52	1361	1852
55	3025	166 375	416	23,45	803	193	172,8	2376	18,18	1348	1818
56	3136	175 616	7,483	23,66	3,826	8,243	175,9	2463	17,86	0,1336	0,01786
57	3249	185 193	550	23,87	849	291	179,1	2552	17,54	1325	1754
58	3364	195 112	616	24,08	871	340	182,2	2642	17,24	1313	1724
59	3481	205 379	681	24,29	893	387	185,4	2734	16,95	1302	1695
60	3600	216 000	746	24,49	915	434	188,5	2827	16,67	1291	1667
61	3721	226 981	7,810	24,70	3,936	8,481	191,6	2922	16,39	0,1280	0,01639
62	3844	238 328	874	24,90	958	527	194,8	3019	16,13	1270	1613
63	3969	250 047	937	25,10	979	573	197,9	3117	15,87	1260	1587
64	4096	262 144	8,000	25,30	4,000	618	201,1	3217	15,62	1250	1562
65	4225	274 625	062	25,50	021	662	204,2	3318	15,38	1240	1538
66	4356	287 496	8,124	25,69	4,041	8,707	207,3	3421	15,15	0,1231	0,01515
67	4489	300 763	185	25,88	062	750	210,5	3526	14,93	1222	1493
68	4624	314 432	246	26,08	082	794	213,6	3632	14,71	1213	1471
69	4761	328 509	307	26,27	102	837	216,8	3739	14,49	1204	1449
70	4900	343 000	367	26,46	121	879	219,9	3848	14,29	1195	1429
71	5041	357 911	8,426	26,65	4,141	8,921	223,1	3959	14,08	0,1187	0,01408
72	5184	373 248	485	26,83	160	963	226,2	4072	13,89	1179	1389
73	5329	389 017	544	27,02	179	9,004	229,3	4185	13,70	1170	1370
74	5476	405 224	602	27,20	198	045	232,5	4301	13,51	1162	1351
75	5625	421 875	660	27,39	217	086	235,6	4418	13,33	1155	1333

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
76	5776	438 976	8,718	27,57	4,236	9,126	238,8	4536	13,16	0,1147	0,01316
77	5929	456 533	775	27,75	254	166	241,9	4657	12,99	1140	1299
78	6084	474 552	832	27,93	273	205	245,0	4778	82	1132	1282
79	6241	493 039	888	28,11	291	244	248,2	4902	66	1125	1266
80	6400	512 000	944	28,28	309	283	251,3	5027	50	1118	1250
81	6561	531 441	9,000	28,46	4,327	9,322	254,5	5153	12,35	0,1111	0,01235
82	6724	551 368	055	28,64	344	360	257,6	5281	20	1104	1220
83	6889	571 787	110	28,81	362	398	260,8	5411	05	1098	1205
84	7056	592 704	165	28,98	380	435	263,9	5542	11,90	1091	1190
85	7225	614 125	220	29,15	397	473	267,0	5675	76	1085	1176
86	7396	636 056	9,274	29,33	4,414	9,510	270,2	5809	11,63	0,1078	0,01163
87	7569	658 503	327	29,50	431	546	273,3	5945	49	1072	1149
88	7744	681 472	381	29,66	448	583	276,5	6082	36	1066	1136
89	7921	704 969	434	29,83	465	619	279,6	6221	24	1060	1124
90	8100	729 000	487	30,00	481	655	282,7	6362	11	1054	1111
91	8281	753 571	9,539	30,17	4,498	9,691	285,9	6504	10,99	0,1048	0,01099
92	8464	778 688	592	30,33	514	726	289,0	6648	87	1043	1087
93	8649	804 357	644	30,50	531	761	292,2	6793	75	1037	1075
94	8836	830 584	695	30,66	547	796	295,3	6940	64	1031	1064
95	9025	857 375	747	30,82	563	830	298,5	7088	53	1026	1053
96	9216	884 736	9,798	30,98	4,579	9,865	301,6	7238	10,42	0,1021	0,01042
97	9409	912 673	849	31,14	595	899	304,7	7390	31	1015	1031
98	9604	941 192	899	31,30	610	933	307,9	7543	20	1010	1020
99	9801	970 299	950	31,46	626	967	311,0	7698	10	1005	1010
100	10000	1000 000	10,00	31,62	642	10,000	314,2	7854	00	1000	0,001000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
101	10 201	1 030 301	10,05	31,78	4,657	10,033	317.3	8012	9,901	0,09950	0,009901
102	10 404	1 061 208	10	31,94	672	066	320,4	8171	804	9901	9804
103	10 609	1 092 727	15	32,09	688	099	323,6	8332	709	9853	9709
104	10 816	1 124 864	20	32,25	703	132	326,7	8495	615	9806	9615
105	11 025	1 157 625	25	32,40	718	164	329,9	8659	524	9759	9524
106	11 236	1 191 016	10,30	32,56	4,733	10,196	333,0	8825	9,434	0,09713	0,009434
107	11 449	1 225 043	34	32,71	747	228	336,2	8992	346	9667	9346
108	11 664	1 259 712	39	32,86	762	260	339,3	9161	259	9623	9259
109	11 881	1 295 029	44	33,02	777	291	342,4	9331	174	9578	9174
110	12 100	1 331 000	49	33,17	791	323	345,6	9503	091	9535	9091
111	12 321	1 367 631	10,54	33,32	4,806	10,354	348,7	9677	9,009	0,09492	0,009009
112	12 544	1 404 928	58	33,47	820	385	351,9	9852	8,929	9449	8929
113	12 769	1 442 897	63	33,62	835	416	355,0	10 029	850	9407	8850
114	12 996	1 481 544	68	33,76	849	446	358,1	10 207	772	9366	8772
115	13 225	1 520 875	72	33,91	863	477	361,3	10 387	696	9325	8696
116	13 456	1 560 896	10,77	34,06	4,877	10,507	364,4	10 568	8,621	0,09285	0,008621
117	13 689	1 601 613	82	34,21	891	537	367,6	10 751	547	9245	8547
118	13 924	1 643 032	86	34,35	905	567	370,7	10 936	475	9206	8475
119	14 161	1 685 159	91	34,50	919	597	373,8	11 122	403	9167	8403
120	14 400	1 728 000	95	34,64	932	627	377,0	11 310	333	9129	8333
121	14 641	1 771 561	11,00	34,79	4,946	10,656	380,1	11 499	8,264	0,09091	0,008264
122	14 884	1 815 848	05	34,93	960	685	383,3	11 690	197	9054	8197
123	15 129	1 860 867	09	35,07	973	714	386,4	11 882	130	9017	8130
124	15 376	1 906 624	14	35,21	987	743	389,6	12 076	065	8980	8065
125	15 625	1 953 125	18	35,36	5,000	772	392,7	12 272	000	8944	8000

Продолжение табл. 1.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
126	15 876	2 000 376	11,22	35,50	5,013	10,801	395,8	12 469	7,937	0,08909	0,007937
127	16 129	2 048 383	27	35,64	027	829	399,0	12 668	874	8874	7874
128	16 384	2 097 152	31	35,78	040	858	402,1	12 868	812	8839	7812
129	16 641	2 146 689	36	35,92	053	886	405,3	13 070	752	8805	7752
130	16 900	2 197 000	40	36,06	066	914	408,4	13 273	692	8771	7692
131	17 161	2 248 091	11,45	36,19	5,079	10,942	411,5	13 478	7,634	0,08737	0,007634
132	17 424	2 299 968	49	36,33	092	970	414,7	13 685	576	8704	7576
133	17 689	2 352 637	53	36,47	104	997	417,8	13 893	519	8671	7519
134	17 956	2 406 104	58	36,61	117	11,025	421,0	14 103	463	8639	7463
135	18 225	2 460 375	62	36,74	130	052	424,1	14 314	407	8607	7407
136	18 496	2 515 456	11,66	36,88	5,143	11,079	427,3	14 527	7,353	0,08575	0,007353
137	18 769	2 571 353	70	37,01	155	106	430,4	14 741	299	8544	7299
138	19 044	2 628 072	75	37,15	168	133	433,5	14 957	246	8513	7246
139	19 321	2 685 619	79	37,28	180	160	436,7	15 175	194	8482	7194
140	19 600	2 744 000	83	37,42	192	187	439,8	15 394	143	8452	7143
141	19 881	2 803 221	11,87	37,55	5,205	11,213	443,0	15 614	7,092	0,08422	0,007092
142	20 164	2 863 288	92	37,68	217	240	446,1	15 837	042	8392	7042
143	20 449	2 924 207	96	37,82	229	266	449,2	16 061	6,993	8362	6993
144	20 736	2 985 984	12,00	37,95	241	292	452,4	16 286	944	8333	6944
145	21 025	3 048 625	04	38,08	254	319	455,5	16 513	897	8305	6897
146	21 316	3 112 136	12,08	38,21	5,266	11,344	458,7	16 742	6,849	0,08276	0,006849
147	21 609	3 176 523	12	38,34	278	370	461,8	16 972	803	8248	6803
148	21 904	3 241 792	17	38,47	290	396	465,0	17 203	757	8220	6757
149	22 201	3 307 949	21	38,60	301	422	468,1	17 437	711	8192	6711
150	22 500	3 375 000	25	38,73	313	447	471,2	17 672	667	8165	6667

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
151	22 801	3 442 951	12,29	38,86	5,325	11,473	474,4	17 908	6,623	0,08138	0,006623
152	23 104	3 511 808	33	38,99	337	498	477,5	18 146	579	8111	6579
153	23 409	3 581 577	37	39,12	348	523	480,7	18 385	536	8085	6536
154	23 716	3 652 264	41	39,24	360	548	483,8	18 626	494	8058	6494
155	24 025	3 723 875	45	39,37	372	573	486,9	18 869	452	8032	6452
156	24 336	3 796 416	12,49	39,50	5,383	11,598	490,1	19 113	6,410	0,08006	0,006410
157	24 649	3 869 893	53	39,62	395	623	493,2	19 359	369	7981	6369
158	24 964	3 944 312	57	39,75	406	647	496,4	19 607	329	7956	6329
159	25 281	4 019 679	61	39,87	418	672	499,5	19 856	289	7931	6289
160	25 600	4 096 000	65	40,00	429	696	502,7	20 106	250	7906	6250
161	25 921	4 173 281	12,69	40,12	5,440	11,720	505,8	20 358	6,211	0,07881	0,006211
162	26 244	4 251 528	73	40,25	451	745	508,9	20 612	173	7857	6173
163	26 569	4 330 747	77	40,37	463	769	512,1	20 867	135	7833	6135
164	26 896	4 410 944	81	40,50	474	793	515,2	21 124	098	7809	6098
165	27 225	4 492 125	85	40,62	485	817	518,4	21 382	061	7785	6061
166	27 556	4 574 296	12,88	40,74	5,496	11,840	521,5	21 642	6,024	0,07762	0,006024
167	27 889	4 657 463	92	40,87	507	864	524,6	21 904	5,988	7738	5988
168	28 224	4 741 632	96	40,99	518	888	527,8	22 167	952	7715	5952
169	28 561	4 826 809	13,00	41,11	529	911	530,9	22 432	917	7692	5917
170	28 900	4 913 000	04	41,23	540	935	534,1	22 698	882	7670	5882
171	29 241	5 000 211	13,08	41,35	5,550	11,958	537,2	22 966	5,848	0,07647	0,005848
172	29 584	5 088 448	11	41,47	561	981	540,4	23 235	814	7625	5814
173	29 929	5 177 717	15	41,59	572	12,005	543,5	23 506	780	7603	5780
174	30 276	5 268 024	19	41,71	583	028	546,6	23 779	747	7581	5747
175	30 625	5 359 375	23	41,83	593	051	549,8	24 053	714	7559	5714

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
176	30 976	5 451 776	13,27	41,95	5,604	12,074	552,9	24 328	5,682	0,07538	0,005682
177	31 329	5 545 233	30	42,07	615	096	556,1	24 606	650	7516	5650
178	31 684	5 639 752	34	42,19	625	119	559,2	24 885	618	7495	5618
179	32 041	5 735 339	38	42,31	636	142	562,3	25 165	587	7474	5587
180	32 400	5 832 000	42	42,43	646	164	565,5	25 447	556	7454	5556
181	32 761	5 929 741	13,45	42,54	5,657	12,187	568,6	25 730	5,525	0,07433	0,005525
182	33 124	6 028 568	49	42,66	667	209	571,8	26 016	495	7412	5495
183	33 489	6 128 487	53	42,78	677	232	574,9	26 302	464	7392	5464
184	33 856	6 229 504	56	42,90	688	254	578,1	26 590	435	7372	5435
185	34 225	6 331 625	60	43,01	698	276	581,2	26 880	405	7352	5405
186	34 596	6 434 856	13,64	43,13	5,708	12,298	584,3	27 172	5,376	0,07332	0,005376
187	34 969	6 539 203	67	43,24	718	320	587,5	27 465	348	7313	5348
188	35 344	6 644 672	71	43,36	729	342	590,6	27 759	319	7293	5319
189	35 721	6 751 269	75	43,47	739	364	593,8	28 055	291	7274	5291
190	36 100	6 859 000	78	43,59	749	386	596,9	28 353	263	7255	5263
191	36 481	6 967 871	13,82	43,70	5,759	12,407	600,0	28 652	5,236	0,07236	0,005236
192	36 864	7 077 888	86	43,82	769	429	603,2	28 953	208	7217	5208
193	37 249	7 189 057	89	43,93	779	450	606,3	29 255	181	7198	5181
194	37 636	7 301 384	93	44,05	789	472	609,5	29 559	155	7180	5155
195	38 025	7 414 875	96	44,16	799	493	612,6	29 865	128	7161	5128
196	38 416	7 529 536	14,00	44,27	5,809	12,515	615,8	30 172	5,102	0,07143	0,005102
197	38 809	7 645 373	04	44,38	819	536	618,9	30 480	076	7125	5076
198	39 204	7 762 392	07	44,50	828	557	622,0	30 791	051	7107	5051
199	39 601	7 880 599	11	44,61	838	578	625,2	31 103	025	7089	5025
200	40 000	8 000 000	14	44,72	848	599	628,3	31 416	000	7071	5000

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
201	40 401	8 120 601	14,18	44,83	5,858	12,620	631,5	31 731	4,975	0,07053	0,004975
202	40 804	8 242 408	21	44,94	867	641	634,6	32 047	950	7036	4950
203	41 209	8 365 427	25	45,06	877	662	637,7	32 366	926	7019	4926
204	41 616	8 489 664	28	45,17	887	683	640,9	32 685	902	7001	4902
205	42 025	8 615 125	32	45,28	896	703	644,0	33 006	878	6984	4878
206	42 436	8 741 816	14,35	45,39	5,906	12,724	647,2	33 329	4,854	0,06967	0,004854
207	42 849	8 869 743	39	45,50	915	745	650,3	33 654	831	6950	4831
208	43 264	8 998 912	42	45,61	925	765	653,5	33 980	808	6934	4808
209	43 681	9 129 329	46	45,72	934	785	656,6	34 307	785	6917	4785
210	44 100	9 261 000	49	45,83	944	806	659,7	34 636	762	6901	4762
211	44 521	9 393 931	14,53	45,93	5,953	12,826	662,9	34 967	4,739	0,06884	0,004739
212	44 944	9 528 128	56	46,04	963	846	666,0	35 299	717	6868	4717
213	45 369	9 663 597	59	46,15	972	866	669,2	35 633	695	6852	4695
214	45 796	9 800 344	63	46,26	981	887	672,3	35 968	673	6836	4673
215	46 225	9 938 375	66	46,37	991	907	675,4	36 305	651	6820	4651
216	46 656	10 077 696	14,70	46,48	6,000	12,927	678,6	36 644	4,630	0,06804	0,004630
217	47 089	10 218 313	73	46,58	009	947	681,7	36 984	608	6788	4608
218	47 524	10 360 232	76	46,69	018	966	684,9	37 325	587	6773	4587
219	47 961	10 503 459	80	46,80	028	986	688,0	37 668	566	6757	4566
220	48 400	10 648 000	83	46,90	037	13,006	691,2	38 013	545	6742	4545
221	48 841	10 793 861	14,87	47,01	6,046	13,026	694,3	38 360	4,525	0,06727	0,004525
222	49 284	10 941 048	90	47,12	055	045	697,4	38 708	505	6712	4505
223	49 729	11 089 567	93	47,22	064	065	700,6	39 057	484	6696	4484
224	50 176	11 239 424	97	47,33	073	084	703,7	39 408	464	6682	4464
225	50 625	11 390 625	15,00	47,43	082	104	706,9	39 761	444	6667	4444

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{2}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
226	51 076	11 543 176	15,03	47,54	6,091	13,123	710,0	40 115	4,425	0,06652	0,004425
227	51 529	11 697 083	07	47,64	100	142	713,1	40 471	405	6637	4405
228	51 984	11 852 352	10	47,75	109	162	716,3	40 828	386	6623	4386
229	52 441	12 008 989	13	47,85	118	181	719,4	41 187	367	6608	4367
230	52 900	12 167 000	17	47,96	127	200	722,6	41 548	348	6594	4348
231	53 361	12 326 391	15,20	48,06	6,136	13,219	725,7	41 910	4,329	0,06580	0,004329
232	53 824	12 487 168	23	48,17	145	238	728,8	42 273	310	6565	4310
233	54 289	12 649 337	26	48,27	153	257	732,0	42 638	292	6551	4292
234	54 756	12 812 904	30	48,37	162	276	735,1	43 005	274	6537	4274
235	55 225	12 977 875	33	48,48	171	295	738,3	43 374	255	6523	4255
236	55 696	13 144 256	15,36	48,58	6,180	13,314	741,4	43 744	4,237	0,06509	0,004237
237	56 169	13 312 053	39	48,68	188	333	744,6	44 115	219	6496	4219
238	56 644	13 481 272	43	48,79	197	351	747,7	44 488	202	6482	4202
239	57 121	13 651 919	46	48,89	206	370	750,8	44 863	184	6468	4184
240	57 600	13 824 000	49	48,99	214	389	754,0	45 239	167	6455	4167
241	58 081	13 997 521	15,52	49,09	6,223	13,407	757,1	45 617	4,149	0,06442	0,004149
242	58 564	14 172 488	56	49,19	232	426	760,3	45 996	132	6428	4132
243	59 049	14 348 907	59	49,30	240	444	763,4	46 377	115	6415	4115
244	59 536	14 526 784	62	49,40	249	463	766,5	46 760	098	6402	4098
245	60 025	14 706 125	65	49,50	257	481	769,7	47 144	082	6389	4082
246	60 516	14 886 936	15,68	49,60	6,266	13,499	772,8	47 529	4,065	0,06376	0,004065
247	61 009	15 069 223	72	49,70	274	518	776,0	47 916	049	6363	4049
248	61 504	15 252 992	75	49,80	283	536	779,1	48 305	032	6350	4032
249	62 001	15 438 249	78	49,90	291	554	782,3	48 696	016	6337	4016
250	62 500	15 625 000	81	50,00	300	572	785,4	49 087	000	6325	4000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
251	63 001	15 813 251	15,84	50,10	6,308	13,590	788,5	49 481	3,984	0,06312	0,003984
252	63 504	16 003 008	87	50,20	316	608	791,7	49 876	968	6299	3968
253	64 009	16 194 277	91	50,30	325	626	794,8	50 273	953	6287	3953
254	64 516	16 387 064	94	50,40	333	644	798,0	50 671	937	6275	3937
255	65 025	16 581 375	97	50,50	341	662	801,1	51 071	922	6262	3922
256	65 536	16 777 216	16,00	50,60	6,350	13,680	804,2	51 472	3,906	0,06250	0,003906
257	66 049	16 974 593	03	50,70	358	698	807,4	51 875	891	6238	3891
258	66 564	17 173 512	06	50,79	366	715	810,5	52 279	876	6226	3876
259	67 081	17 373 979	09	50,89	374	733	813,7	52 685	861	6214	3861
260	67 600	17 576 000	12	50,99	383	751	816,8	53 093	846	6202	3846
261	68 121	17 779 581	16,16	51,09	6,391	13,768	820,0	53 502	3,831	0,06190	0,003831
262	68 644	17 984 728	19	51,19	399	786	823,1	53 913	817	6178	3817
263	69 169	18 191 447	22	51,28	407	803	826,2	54 325	802	6166	3802
264	69 696	18 399 744	25	51,38	415	821	829,4	54 739	783	6155	3788
265	70 225	18 609 625	28	51,48	423	838	832,5	55 155	774	6143	3774
266	70 756	18 821 096	16,31	51,58	6,431	13,856	835,7	55 572	3,759	0,06131	0,003759
267	71 289	19 034 163	34	51,67	439	873	838,8	55 990	745	6120	3745
268	71 824	19 248 832	37	51,77	447	890	841,9	56 410	731	6108	3731
269	72 361	19 465 109	40	51,87	455	908	845,1	56 832	717	6097	3717
270	72 900	19 683 000	43	51,96	463	925	848,2	57 256	704	6086	3704
271	73 441	19 902 511	16,46	52,06	6,471	13,942	851,4	57 680	3,690	0,06075	0,003690
272	73 984	20 123 648	49	52,15	479	959	854,5	58 107	676	6063	3676
273	74 529	20 346 417	52	52,25	487	976	857,7	58 535	663	6052	3663
274	75 076	20 570 824	55	52,35	495	993	860,8	58 965	650	6041	3650
275	75 625	20 796 875	58	52,44	503	14,010	863,9	59 396	636	6030	3636

Продолжение табл. I.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
276	76 176	21 024 576	16,61	52,54	6,511	14,027	867,1	59 828	3,623	0,06019	0,003623
277	76 729	21 253 933	64	52,63	519	044	870,2	60 263	610	6008	3610
278	77 284	21 484 952	67	52,73	527	061	873,4	60 699	597	5998	3597
279	77 841	21 717 639	70	52,82	534	078	876,5	61 136	584	5987	3584
280	78 400	21 952 000	73	52,92	542	095	879,6	61 575	571	5976	3571
281	78 961	22 188 041	16,76	53,01	6,550	14,111	882,8	62 016	3,559	0,05966	0,003559
282	79 524	22 425 768	79	53,10	558	128	885,9	62 458	546	5955	3546
283	80 089	22 665 187	82	53,20	565	145	889,1	62 902	534	5944	3534
284	80 656	22 906 304	85	53,29	573	161	892,2	63 347	521	5934	3521
285	81 225	23 149 125	88	53,39	581	178	895,4	63 794	509	5923	3509
286	81 796	23 393 656	16,91	53,48	6,589	14,195	898,5	64 242	3,497	0,05913	0,003497
287	82 369	23 639 903	94	53,57	596	211	901,6	64 692	484	5903	3484
288	82 944	23 887 872	97	53,67	604	228	904,8	65 144	472	5893	3472
289	83 521	24 137 569	17,00	53,76	611	244	907,9	65 597	460	5882	3460
290	84 100	24 389 000	03	53,85	619	260	911,1	66 052	448	5872	3448
291	84 681	24 642 171	17,06	53,94	6,627	14,277	914,2	66 508	3,436	0,05862	0,003436
292	85 264	24 897 088	09	54,04	634	293	917,3	66 966	425	5852	3425
293	85 849	25 153 757	12	54,13	642	309	920,5	67 425	413	5842	3413
294	86 436	25 412 184	15	54,22	649	326	923,6	67 887	401	5832	3401
295	87 025	25 672 375	18	54,31	657	342	926,8	68 349	390	5822	3390
296	87 616	25 934 336	17,20	54,41	6,664	14,358	929,9	68 813	3,378	0,05812	0,003378
297	88 209	26 198 073	23	54,50	672	374	933,1	69 279	367	5803	3367
298	88 804	26 463 592	26	54,59	679	390	936,2	69 746	356	5793	3356
299	89 401	26 730 899	29	54,68	687	406	939,3	70 215	344	5783	3344
300	90 000	27 000 000	32	54,77	694	422	942,5	70 686	333	5774	3333

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
301	90 601	27 270 901	17,35	54,86	6,702	14,439	945,6	71 158	3,322	0,05764	0,003322
302	91 204	27 543 608	38	54,95	709	454	948,8	71 632	311	5754	3311
303	91 809	27 818 127	41	55,05	717	470	951,9	72 107	300	5745	3300
304	92 416	28 094 464	44	55,14	724	486	955,0	72 583	289	5735	3289
305	93 025	28 372 625	46	55,23	731	502	958,2	73 062	279	5726	3279
306	93 636	28 652 616	17,49	55,32	6,739	14,518	961,3	73 542	3,268	0,05717	0,003268
307	94 249	28 934 443	52	55,41	746	534	964,5	74 023	257	5707	3257
308	94 864	29 218 112	55	55,50	753	550	967,6	74 506	247	5698	3247
309	95 481	29 503 629	58	55,59	761	565	970,8	74 991	236	5689	3236
310	96 100	29 791 000	61	55,68	768	581	973,9	75 477	226	5680	3226
311	96 721	30 080 231	17,64	55,77	6,775	14,597	977,0	75 964	3,215	0,05670	0,003215
312	97 344	30 371 328	66	55,86	782	612	980,2	76 454	205	5661	3205
313	97 969	30 664 297	69	55,95	790	628	983,3	76 945	195	5652	3195
314	98 596	30 959 144	72	56,04	797	643	986,5	77 437	185	5643	3185
315	99 225	31 255 875	75	56,12	804	659	989,6	77 931	175	5634	3175
316	99 856	31 554 496	17,78	56,21	6,811	14,674	992,7	78 427	3,165	0,05625	0,003165
317	100 489	31 855 013	80	56,30	818	690	995,9	78 924	155	5617	3155
318	101 124	32 157 432	83	56,39	826	705	999,0	79 423	145	5608	3145
319	101 761	32 461 759	86	56,48	833	721	1002	79 923	135	5599	3135
320	102 400	32 768 000	89	56,57	840	736	1005	80 425	125	5590	3125
321	103 041	33 076 161	17,92	56,66	6,847	14,751	1008	80 928	3,115	0,05581	0,003115
322	103 684	33 386 248	94	56,75	854	767	1012	81 433	106	5573	3106
323	104 329	33 698 267	97	56,83	861	782	1015	81 940	096	5564	3096
324	104 976	34 012 224	18,00	56,92	868	797	1018	82 448	086	5556	3086
325	105 625	34 328 125	03	57,01	875	812	1021	82 958	077	5547	3077

Продолжение табл. I

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
326	106 276	34 645 976	18,06	57,10	6,882	14,828	1024	83 469	3,067	0,05538	0,003067
327	106 929	34 965 783	08	57,18	889	843	1027	83 982	059	5530	3058
328	107 584	35 287 552	11	57,27	896	858	1030	84 496	049	5522	3049
329	108 241	35 611 289	14	57,36	903	873	1034	85 012	040	5513	3040
330	108 900	35 937 000	17	57,45	910	888	1037	85 530	030	5505	3030
331	109 561	36 264 691	18,19	57,53	6,917	14,903	1040	86 049	3,021	0,05496	0,003021
332	110 224	36 594 368	22	57,62	924	918	1043	86 570	012	5488	3012
333	110 889	36 926 037	25	57,71	931	933	1046	87 092	003	5480	3003
334	111 556	37 259 704	28	57,79	938	948	1049	87 616	2,994	5472	2994
335	112 225	37 595 375	30	57,88	945	963	1052	88 141	985	5464	2985
336	112 896	37 933 056	18,33	57,97	6,952	14,978	1056	88 668	2,976	0,05455	0,002976
337	113 569	38 272 753	36	58,05	959	993	1059	89 197	967	5447	2967
338	114 244	38 614 472	38	58,14	966	15,007	1062	89 727	959	5439	2959
339	114 921	38 958 219	41	58,22	973	022	1065	90 259	950	5431	2950
340	115 600	39 304 000	44	58,31	980	037	1068	90 792	941	5423	2941
341	116 281	39 651 821	18,47	58,40	6,986	15,052	1071	91 327	2,933	0,05415	0,002933
342	116 964	40 001 688	49	58,48	993	066	1074	91 863	924	5407	2924
343	117 649	40 353 607	52	58,57	7,000	081	1078	92 401	915	5399	2915
344	118 336	40 707 584	55	58,65	007	096	1081	92 941	907	5392	2907
345	119 025	41 063 625	57	58,74	014	110	1084	93 482	899	5384	2899
346	119 716	41 421 736	18,60	58,82	7,020	15,125	1087	94 025	2,890	0,05376	0,002890
347	120 409	41 781 923	63	58,91	027	139	1090	94 569	882	5368	2882
348	121 104	42 144 192	65	58,99	034	154	1093	95 115	874	5361	2874
349	121 801	42 508 549	68	59,08	041	168	1096	95 662	865	5353	2865
350	122 500	42 875 000	71	59,16	047	183	1100	96 211	857	5345	2857

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10}$	$n\pi$	$\frac{n\pi^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
351	123 201	43 243 551	18,73	59,25	7,054	15,197	1103	96 762	2,849	0,05338	0,002849
352	123 904	43 614 208	76	59,33	061	212	1106	97 314	841	5330	2841
353	124 609	43 986 977	79	59,41	067	226	1109	97 868	833	5322	2833
354	125 316	44 361 864	81	59,50	074	241	1112	98 423	825	5315	2825
355	126 025	44 738 875	84	59,58	081	255	1115	98 980	817	5307	2817
356	126 736	45 118 016	18,87	59,67	7,087	15,269	1118	99 538	2,809	0,05300	0,002809
357	127 449	45 499 293	89	59,75	094	283	1122	100 098	801	5293	2801
358	128 164	45 882 712	92	59,83	101	298	1125	100 660	793	5285	2793
359	128 881	46 268 279	95	59,92	107	312	1128	101 223	786	5278	2786
360	129 600	46 656 000	97	60,00	114	326	1131	101 788	778	5270	2778
361	130 321	47 045 881	19,00	60,08	7,120	15,340	1134	102 354	2,770	0,05263	0,002770
362	131 044	47 437 928	03	60,17	127	355	1137	102 922	762	5256	2762
363	131 769	47 832 147	05	60,25	133	369	1140	103 491	755	5249	2755
364	132 496	48 228 544	08	60,33	140	383	1144	104 062	747	5241	2747
365	133 225	48 627 125	10	60,42	147	397	1147	104 635	740	5234	2740
366	133 956	49 027 896	19,13	60,50	7,153	15,411	1150	105 209	2,732	0,05227	0,002732
367	134 689	49 430 863	16	60,58	160	425	1153	105 785	725	5220	2725
368	135 424	49 836 032	18	60,66	166	439	1156	106 362	717	5213	2717
369	136 161	50 243 409	21	60,75	173	453	1159	106 941	710	5206	2710
370	136 900	50 653 000	24	60,83	179	467	1162	107 521	703	5199	2703
371	137 641	51 064 811	19,26	60,91	7,186	15,481	1166	108 103	2,695	0,05192	0,002695
372	138 384	51 478 848	29	60,99	192	495	1169	108 687	688	5185	2688
373	139 129	51 895 117	31	61,07	198	508	1172	109 272	681	5178	2681
374	139 876	52 313 624	34	61,16	205	522	1175	109 858	674	5171	2674
375	140 625	52 734 375	36	61,24	211	536	1178	110 447	667	5164	2667

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
376	141 376	53 157 376	19,39	61,32	7,218	15,550	1181	111 036	2,660	0,05157	0,002660
377	142 129	53 582 633	42	61,40	224	564	1184	111 628	653	5150	2653
378	142 884	54 010 152	44	61,48	230	577	1188	112 221	649	5143	2646
379	143 641	54 439 939	47	61,56	237	591	1191	112 815	639	5137	2639
380	144 400	54 872 000	49	61,64	243	605	1194	113 411	632	5130	2632
381	145 161	55 306 341	19,52	61,73	7,250	15,619	1197	114 009	2,625	0,05123	0,002625
382	145 924	55 742 968	54	61,81	256	632	1200	114 608	618	5116	2618
383	146 689	56 181 887	57	61,89	262	646	1203	115 209	611	5110	2611
384	147 456	56 623 104	60	61,97	268	659	1206	115 812	604	5103	2604
385	148 225	57 066 625	62	62,05	275	673	1210	116 416	597	5096	2597
386	148 996	57 512 456	19,65	62,13	7,281	15,687	1213	117 021	2,591	0,05090	0,002591
387	149 769	57 960 603	67	62,21	287	700	1216	117 628	584	5083	2584
388	150 544	58 411 072	70	62,29	294	714	1219	118 237	577	5077	2577
389	151 321	58 863 869	72	62,37	300	727	1222	118 847	571	5070	2571
390	152 100	59 319 000	75	62,45	306	741	1225	119 459	564	5064	2564
391	152 881	59 776 471	19,77	62,53	7,312	15,754	1228	120 072	2,558	0,05057	0,002558
392	153 664	60 236 288	80	62,61	319	767	1232	120 687	551	5051	2551
393	154 449	60 698 457	82	62,69	325	781	1235	121 304	545	5044	2545
394	155 236	61 162 984	85	62,77	331	794	1238	121 922	538	5038	2538
395	156 025	61 629 875	87	62,85	337	808	1241	122 542	532	5032	2532
396	156 816	62 099 136	19,90	62,93	7,343	15,821	1244	123 163	2,525	0,05025	0,002525
397	157 609	62 570 773	92	63,01	350	834	1247	123 786	519	5019	2519
398	158 404	63 044 792	95	63,09	356	848	1250	124 410	513	5013	2513
399	159 201	63 521 199	97	63,17	362	861	1253	125 036	506	5006	2506
400	160 000	64 000 000	20,00	63,25	368	874	1257	125 664	500	5000	2500

Продолжение табл. 1

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{2}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
401	160 801	64 481 201	20,02	63,32	7,374	15,887	1260	126 293	2,494	0,04994	0,002494
402	161 604	64 964 808	05	63,40	380	900	1263	126 923	488	4988	2488
403	162 409	65 450 827	07	63,48	386	914	1266	127 556	481	4981	2481
404	163 216	65 939 264	10	63,56	393	927	1269	128 190	475	4975	2475
405	164 025	66 430 125	12	63,64	399	940	1272	128 825	469	4969	2469
406	164 836	66 923 416	20,15	63,72	7,405	15,953	1275	129 462	2,463	0,04963	0,002463
407	165 649	67 419 143	17	63,80	411	966	1279	130 100	457	4957	2457
408	166 464	67 917 312	20	63,87	417	979	1282	130 741	451	4951	2451
409	167 281	68 417 929	22	63,95	423	992	1285	131 382	445	4945	2445
410	168 100	68 921 000	25	64,03	429	16,005	1288	132 025	439	4939	2439
411	168 921	69 426 531	20,27	64,11	7,435	16,018	1291	132 670	2,433	0,04933	0,002433
412	169 744	69 934 528	30	64,19	441	031	1294	133 317	427	4927	2427
413	170 569	70 444 997	32	64,27	447	044	1297	133 965	421	4921	2421
414	171 396	70 957 944	35	64,34	453	057	1301	134 614	415	4915	2415
415	172 225	71 473 375	37	64,42	459	070	1304	135 265	410	4909	2410
416	173 056	71 991 296	20,40	64,50	7,465	16,083	1307	135 918	2,404	0,04903	0,002404
417	173 889	72 511 713	42	64,58	471	096	1310	136 572	398	4897	2398
418	174 724	73 034 632	45	64,65	477	109	1313	137 228	392	4891	2392
419	175 561	73 560 059	47	64,73	483	121	1316	137 885	387	4885	2387
420	176 400	74 088 000	49	64,81	489	134	1319	138 544	381	4880	2381
421	177 241	74 618 461	20,52	64,88	7,495	16,147	1323	139 205	2,375	0,04874	0,002375
422	178 084	75 151 448	54	64,96	501	160	1326	139 867	370	4868	2370
423	178 929	75 686 967	57	65,04	507	173	1329	140 531	364	4862	2364
424	179 776	76 225 024	59	65,12	513	185	1332	141 196	358	4856	2358
425	180 625	76 765 625	62	65,19	518	198	1335	141 863	353	4851	2353

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{2}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
426	181 476	77 308 776	20,64	65,27	7,524	16,211	1338	142 531	2,347	0,04845	0,002347
427	182 329	77 854 483	66	65,35	530	223	1341	143 201	342	4839	2342
428	183 184	78 402 752	69	65,42	536	236	1345	143 872	336	4834	2336
429	184 041	78 953 589	71	65,50	542	249	1348	144 545	331	4828	2331
430	184 900	79 507 000	74	65,57	548	261	1351	145 220	326	4822	2326
431	185 761	80 062 991	20,76	65,65	7,554	16,274	1354	145 896	2,320	0,04817	0,002320
432	186 624	80 621 568	78	65,73	560	287	1357	146 574	315	4811	2315
433	187 489	81 182 737	81	65,80	565	299	1360	147 254	309	4806	2309
434	188 356	81 746 504	83	65,88	571	312	1363	147 934	304	4800	2304
435	189 225	82 312 875	86	65,95	577	324	1367	148 617	299	4795	2299
436	190 096	82 881 856	20,88	66,03	7,583	16,337	1370	149 301	2,294	0,04789	0,002294
437	190 969	83 453 453	90	66,11	589	349	1373	149 987	288	4784	2288
438	191 844	84 027 672	93	66,18	594	362	1376	150 674	283	4778	2283
439	192 721	84 604 519	95	66,26	600	374	1379	151 363	278	4773	2278
440	193 600	85 184 000	98	66,33	606	386	1382	152 053	273	4767	2273
441	194 481	85 766 121	21,00	66,41	7,612	16,399	1385	152 745	2,268	0,04762	0,002268
442	195 364	86 350 888	02	66,48	617	411	1389	153 439	262	4757	2262
443	196 249	86 938 307	05	66,56	623	424	1392	154 134	257	4751	2257
444	197 136	87 528 384	07	66,63	629	436	1395	154 830	252	4746	2252
445	198 025	88 121 125	10	66,71	635	448	1398	155 528	247	4740	2247
446	198 916	88 716 536	21,12	66,78	7,640	16,461	1401	156 228	2,242	0,04735	0,002242
447	199 809	89 314 623	14	66,86	646	473	1404	156 930	237	4730	2237
448	200 704	89 915 392	17	66,93	652	485	1407	157 633	232	4725	2232
449	201 601	90 518 849	19	67,01	657	497	1411	158 337	227	4719	2227
450	202 500	91 125 000	21	67,08	663	510	1414	159 043	222	4714	2222

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{2}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
451	203 401	91 733 851	21,24	67,16	7,669	16,522	1417	159 751	2,217	0,04709	0,002217
452	204 304	92 345 408	26	67,23	674	534	1420	160 460	212	4704	2212
453	205 209	92 959 677	28	67,31	680	546	1423	161 171	208	4698	2208
454	206 116	93 576 664	31	67,38	686	558	1426	161 883	203	4693	2203
455	207 025	94 196 375	33	67,45	691	571	1429	162 597	198	4688	2198
456	207 936	94 818 816	21,35	67,53	7,697	16,583	1433	163 313	2,193	0,04683	0,002193
457	208 849	95 443 993	38	67,60	703	595	1436	164 030	188	4678	2188
458	209 764	96 071 912	40	67,68	708	607	1439	164 748	183	4673	2183
459	210 681	96 702 579	42	67,75	714	619	1442	165 468	179	4668	2179
460	211 600	97 336 000	45	67,82	719	631	1445	166 190	174	4663	2174
461	212 521	97 972 181	21,47	67,90	7,725	16,643	1448	166 914	2,169	0,04657	0,002169
462	213 444	98 611 128	49	67,97	731	655	1451	167 639	165	4652	2165
463	214 369	99 252 847	52	68,04	736	667	1455	168 365	160	4647	2160
464	215 296	99 897 344	54	68,12	742	679	1458	169 093	155	4642	2155
465	216 225	100 544 625	56	68,19	747	691	1461	169 823	151	4637	2151
466	217 156	101 194 696	21,59	68,26	7,753	16,703	1464	170 554	2,146	0,04632	0,002146
467	218 089	101 847 563	61	68,34	758	715	1467	171 287	141	4627	2141
468	219 024	102 503 232	63	68,41	764	727	1470	172 021	137	4623	2137
469	219 961	103 161 709	66	68,48	769	739	1473	172 757	132	4618	2132
470	220 900	103 823 000	68	68,56	775	751	1477	173 494	128	4613	2128
471	221 841	104 487 111	21,70	68,63	7,780	16,763	1480	174 234	2,123	0,04608	0,002123
472	222 784	105 154 048	73	68,70	786	774	1483	174 974	119	4603	2119
473	223 729	105 823 817	75	68,77	791	786	1486	175 716	114	4598	2114
474	224 676	106 496 424	77	68,85	797	798	1489	176 460	110	4593	2110
475	225 625	107 171 875	79	68,92	802	810	1492	177 205	105	4588	2105

Продолжение табл. I

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{n}$
476	226 576	107 850 176	21,82	68,99	7,808	16,822	1495	177 952	2,101	0,04583	0,002101
477	227 529	108 531 333	84	69,07	813	833	1499	178 701	096	4579	2096
478	228 484	109 215 352	86	69,14	819	845	1502	179 451	092	4574	2092
479	229 441	109 902 239	89	69,21	824	857	1505	180 203	083	4569	2088
480	230 400	110 592 000	91	69,28	830	869	1508	180 956	083	4564	2083
481	231 361	111 284 641	21,93	69,35	7,835	16,880	1511	181 711	2,079	0,04560	0,002079
482	232 324	111 980 168	95	69,43	841	892	1514	182 467	075	4555	2075
483	233 289	112 678 587	98	69,50	846	904	1517	183 225	070	4550	2070
484	234 256	113 379 904	22,00	69,57	851	915	1521	183 984	066	4545	2066
485	235 225	114 084 125	02	69,64	857	927	1524	184 745	062	4541	2062
486	236 196	114 791 256	22,05	69,71	7,862	16,939	1527	185 508	2,058	0,04536	0,002058
487	237 169	115 501 303	07	69,79	868	950	1530	186 272	053	4531	2053
488	238 144	116 214 272	09	69,86	873	962	1533	187 038	049	4527	2049
489	239 121	116 930 169	11	69,93	878	973	1536	187 805	045	4522	2045
490	240 100	117 649 000	14	70,00	884	985	1539	188 574	041	4518	2041
491	241 081	118 370 771	22,16	70,07	7,889	16,997	1543	189 345	2,037	0,04513	0,002037
492	242 064	119 095 488	18	70,14	894	17,008	1546	190 117	033	4508	2033
493	243 049	119 823 157	20	70,21	900	020	1549	190 890	028	4504	2028
494	244 036	120 553 784	23	70,29	905	031	1552	191 665	024	4499	2024
495	245 025	121 287 375	25	70,36	910	043	1555	192 442	020	4495	2020
496	246 016	122 023 936	22,27	70,43	7,916	17,054	1558	193 221	2,016	0,04490	0,002016
497	247 009	122 763 473	29	70,50	921	065	1561	194 000	012	4486	2012
498	248 004	123 505 992	32	70,57	926	077	1565	194 782	008	4481	2008
499	249 001	124 251 499	34	70,64	932	088	1568	195 565	004	4477	2004
500	250 000	125 000 000	36	70,71	937	100	1571	196 350	000	4472	2000

Таблица 2

Степени некоторых чисел

n	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
1	1	1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256	512	1 024
3	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049
4	256	1 024	4 096	16 384	65 536	262 144	1 048 576
5	625	3 125	15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625
6	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616	10 077 696	60 466 176
7	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801	40 353 607	282 475 249
8	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216	134 217 728	1 073 741 824
9	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721	387 420 489	3 486 784 401
10	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000	10 000 000 000
11	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881	2 357 947 691	25 937 424 601
12	20 736	248 832	2 985 984	35 831 808	429 981 696	5 159 780 352	61 917 364 224
13	28 561	371 293	4 826 809	62 748 517	815 730 721	10 604 499 373	137 858 491 849
14	38 416	537 824	7 529 536	105 413 504	1 475 789 056	20 661 046 784	289 254 654 976
15	50 625	759 375	11 390 625	170 859 375	2 562 890 625	38 443 359 375	576 650 390 625
16	65 536	1 048 576	16 777 216	268 435 456	4 294 967 296	68 719 476 736	1 099 511 627 776
17	83 521	1 419 857	24 137 569	410 338 673	6 975 757 441	118 587 876 497	2 015 993 900 449
18	104 976	1 889 568	34 012 224	612 220 032	11 019 960 576	198 359 290 368	3 570 467 226 624
19	130 321	2 476 099	47 045 881	893 871 739	16 983 563 041	322 687 697 779	6 131 066 257 801
20	160 000	3 200 000	64 000 000	1 280 000 000	25 600 000 000	512 000 000 000	10 240 000 000 000
21	194 481	4 084 101	85 766 121	1 801 088 541	37 822 859 361	794 280 046 581	16 679 880 978 201
22	234 256	5 153 632	113 379 904	2 494 357 888	54 875 873 536	1 207 269 217 792	26 559 922 791 424
23	279 841	6 436 343	148 035 889	3 404 825 447	78 310 985 281	1 801 152 661 463	41 426 511 213 649
24	331 776	7 962 624	191 102 976	4 586 471 424	110 075 314 176	2 641 807 540 224	63 403 380 965 376
25	390 625	9 765 625	244 140 625	6 103 515 625	152 587 890 625	3 814 697 265 625	95 367 431 640 625

Таблица 3

Числа $\frac{n}{\pi}$ и $\frac{\pi}{n}$

n	$\frac{n}{\pi}$	$\frac{\pi}{n}$	n	n	$\frac{n}{\pi}$	$\frac{\pi}{n}$	n
1	0,3183	3,142	1	31	9,868	0,1013	31
2	6366	1,5708	2	32	10,19	0,09817	32
3	9549	0472	3	33	50	9520	33
4	1,2732	0,7854	4	34	10,82	0,09239	34
5	5915	6283	5	35	11,14	8976	35
6	9099	5236	6	36	46	8727	36
7	2,228	0,4488	7	37	11,78	0,08491	37
8	546	3927	8	38	12,10	8267	38
9	865	3481	9	39	41	8051	39
10	3,183	0,3142	10	40	12,73	0,07854	40
11	501	2856	11	41	13,05	7662	41
12	820	2618	12	42	37	7480	42
13	4,138	0,2417	13	43	13,69	0,07306	43
14	456	2244	14	44	14,01	7140	44
15	775	2094	15	45	32	6981	45
16	5,093	0,1963	16	46	14,64	0,06830	46
17	411	1848	17	47	96	6684	47
18	730	1745	18	48	15,28	6545	48
19	6,048	0,1653	19	49	15,60	0,06411	49
20	366	1571	20	50	92	6283	50
21	685	1446	21	51	16,23	6159	51
22	7,003	0,1451	22	52	16,55	0,06042	52
23	321	1366	23	53	87	5928	53
24	639	1309	24	54	17,19	5818	54
25	7,958	0,1257	25	55	17,51	0,05712	55
26	8,276	1208	26	56	83	5610	56
27	594	1163	27	57	18,14	5512	57
28	8,913	0,1122	28	58	18,46	0,05417	58
29	9,231	1083	29	59	78	5325	59
30	549	1047	30	60	19,10	5236	60

Примеры: 1. $\frac{\pi}{14} = 0{,}2244$ ($n = 14$ находим в левом крайнем столбце таблицы).

2. $\frac{32}{\pi} = 10{,}19$ ($n = 32$ находим в пятом вертикальном столбце таблицы).

Таблица 4

Числа $\frac{n}{M}$ и $\frac{M}{n}$

n	$\frac{n}{M}$	$\frac{M}{n}$	n	$\frac{n}{M}$	$\frac{M}{n}$
1	2,303	0,4343	16	36,84	0,02714
2	4,605	2171	17	39,14	02555
3	6,908	1448	18	41,45	02413
4	9,210	0,1086	19	43,75	0,02286
5	11,51	0,08686	20	46,05	02171
6	13,82	07235	21	48,35	02068
7	16,12	0,06042	22	50,66	0,01974
8	18,42	05429	23	52,96	01888
9	20,72	04825	24	55,26	01810
10	23,03	0,04343	25	57,56	0,01738
11	25,33	03949	26	59,87	01670
12	27,63	03620	27	62,17	01608
13	29,93	0,03341	28	64,47	0,01551
14	32,24	03102	29	66,77	01498
15	34,54	02895	30	69,08	01448

Таблица 5

Числа кратные и обратные e

n	ne	$\frac{n}{e}$	$\frac{e}{n}$	n	ne	$\frac{n}{e}$	$\frac{e}{n}$
1	2,718	0,3679	2,718	16	43,49	5,886	0,1699
2	5,437	7358	1,3591	17	46,21	6,254	1599
3	8,155	1,1036	0,9061	18	48,93	622	1510
4	10,87	1,4715	0,6796	19	51,65	6,990	0,1431
5	13,59	8394	5437	20	54,37	7,358	1359
6	16,31	2,207	4530	21	57,08	725	1294
7	19,03	2,575	0,3883	22	59,80	8,093	0,1265
8	21,75	943	3398	23	62,52	461	1182
9	24,46	3,311	3020	24	65,24	829	1133
10	27,18	3,679	0,2718	25	67,96	9,197	0,1087
11	29,90	4,047	2471	26	70,68	565	1045
12	32,62	415	2265	27	73,39	933	1007
13	35,34	4,782	0,2091	28	76,11	10,30	0,09708
14	38,06	5,150	1942	29	78,83	67	09366
15	40,77	518	1812	30	81,55	11,04	09061

Примеры: 1. $\frac{23}{M} = 52{,}96$ ($n = 23$, табл. 4).

2. $8e = 21{,}75$ ($n = 8$ находим в левом крайнем столбце табл. 5).

Таблица 6

Простые числа до 2803

1	179	421	677	971	1259	1559	1873	2203	2521
2	181	431	683	977	1277	1567	1877	2207	2531
3	191	433	691	983	1279	1571	1879	2213	2539
5	193	439	701	991	1283	1579	1889	2221	2543
7	197	443	709	997	1289	1583	1901	2237	2549
11	199	449	719	1009	1291	1597	1907	2239	2551
13	211	457	727	1013	1297	1601	1913	2243	2557
17	223	461	733	1019	1301	1607	1931	2251	2579
19	227	463	739	1021	1303	1609	1933	2267	2591
23	229	467	743	1031	1307	1613	1949	2269	2593
29	233	479	751	1033	1319	1619	1951	2273	2609
31	239	487	757	1039	1321	1621	1973	2281	2617
37	241	491	761	1049	1327	1627	1979	2287	2621
41	251	499	769	1051	1361	1637	1987	2293	2633
43	257	503	773	1061	1367	1657	1993	2297	2647
47	263	509	787	1063	1373	1663	1997	2309	2657
53	269	521	797	1069	1381	1667	1999	2311	2659
59	271	523	809	1087	1399	1669	2003	2333	2663
61	277	541	811	1091	1409	1693	2011	2339	2671
67	281	547	821	1093	1423	1697	2017	2341	2677
71	283	557	823	1097	1427	1699	2027	2347	2683
73	293	563	827	1103	1429	1709	2029	2351	2687
79	307	569	829	1109	1433	1721	2039	2357	2689
83	311	571	839	1117	1439	1723	2053	2371	2693
89	313	577	853	1123	1447	1733	2063	2377	2699
97	317	587	857	1129	1451	1741	2069	2381	2707
101	331	593	859	1151	1453	1747	2081	2383	2711
103	337	599	863	1153	1459	1753	2083	2389	2713
107	347	601	877	1163	1471	1759	2087	2393	2719
109	349	607	881	1171	1481	1777	2089	2399	2729
113	353	613	883	1181	1483	1783	2099	2411	2731
127	359	617	887	1187	1487	1787	2111	2417	2741
131	367	619	907	1193	1489	1789	2113	2423	2749
137	373	631	911	1201	1493	1801	2129	2437	2753
139	379	641	919	1213	1499	1811	2131	2441	2767
149	383	643	929	1217	1511	1823	2137	2447	2777
151	389	647	937	1223	1523	1831	2141	2459	2789
157	397	653	941	1229	1531	1847	2143	2467	2791
163	401	659	947	1231	1543	1861	2153	2473	2797
167	409	661	953	1237	1549	1867	2161	2477	2801
173	419	673	967	1249	1553	1871	2179	2503	2803

Таблица 7

Некоторые несократимые дроби

1:2	0,5000	1:11	0,09091	7:15	0,4667	3:19	0,1579
		2:11	0,1818	8:15	0,5333	4:19	0,2105
1:3	0,3333	3:11	0,2727	11:15	0,7333	5:19	0,2632
2:3	0,6667	4:11	0,3636	13:15	0,8667	6:19	0,3158
		5:11	0,4545	14:15	0,9333	7:19	0,3684
1:4	0,2500	6:11	0,5455			8:19	0,4211
3:4	0,7500	7:11	0,6364	1:16	0,06250	9:19	0,4737
				3:16	0,1875	10:19	0,5263
1:5	0,2000	8:11	0,7273	5:16	0,3125	11:19	0,5789
2:5	0,4000	9:11	0,8182	7:16	0,4375	12:19	0,6316
3:5	0,6000	10:11	0,9091	9:16	0,5625	13:19	0,6842
4:5	0,8000			11:16	0,6875	14:19	0,7368
		1:12	0,08333	13:16	0,8125	15:19	0,7895
1:6	0,1667	5:12	0,4167	15:16	0,9375	16:19	0,8421
5:6	0,8333	7:12	0,5833			17:19	0,8947
		11:12	0,9167	1:17	0,05882	18:19	0,9474
1:7	0,1429			2:17	0,1176		
2:7	0,2857	1:13	0,07692	3:17	0,1765	1:20	0,05000
3:7	0,4286	2:13	0,1538	4:17	0,2353	3:20	0,1500
4:7	0,5714	3:13	0,2308	5:17	0,2941	7:20	0,3500
5:7	0,7143	4:13	0,3077	6:17	0,3529	9:20	0,4500
6:7	0,8571	5:13	0,3846	7:17	0,4118	11:20	0,5500
		6:13	0,4615	8:17	0,4706	13:20	0,6500
1:8	0,1250	7:13	0,5385	9:17	0,5294	17:20	0,8500
3:8	0,3750	8:13	0,6154	10:17	0,5882	19:20	0,9500
5:8	0,6250	9:13	0,6923	11:17	0,6471	1:21	0,04762
7:8	0,8750	10:13	0,7692	12:17	0,7059	2:21	0,09524
		11:13	0,8462	13:17	0,7647	4:21	0,1905
1:9	0,1111	12:13	0,9231	14:17	0,8235	5:21	0,2381
2:9	0,2222			15:17	0,8824	8:21	0,3810
4:9	0,4444	1:14	0,07143	16:17	0,9412	10:21	0,4762
5:9	0,5556	3:14	0,2143	1:18	0,05556	11:21	0,5238
7:9	0,7778	5:14	0,3571	5:18	0,2778	13:21	0,6190
8:9	0,8889	9:14	0,6429	7:18	0,3889		
		11:14	0,7857	11:18	0,6111	16:21	0,7619
1:10	0,1000	13:14	0,9286	13:18	0,7222	17:21	0,8095
3:10	0,3000	1:15	0,06667	17:18	0,9444	19:21	0,9048
7:10	0,7000	2:15	0,1333			20:21	0,9524
9:10	0,9000	4:15	0,2667	1:19	0,05263		
				2:19	0,1053		

Таблица 8

Квадратные и кубические корни из некоторых дробей

$\frac{p}{q}$	$\sqrt{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$	$\frac{p}{q}$	$\sqrt{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$
$^1/_2$	0,7071	0,7937	$^1/_{11}$	0,3015	0,4496
$^1/_3$	0,5774	0,6934	$^2/_{11}$	0,4264	0,5665
$^2/_3$	0,8165	0,8736	$^3/_{11}$	0,5222	0,6485
$^1/_4$	0,5000	0,6300	$^4/_{11}$	0,6030	0,7138
$^3/_4$	0,8660	0,9086	$^5/_{11}$	0,6742	0,7689
$^1/_5$	0,4472	0,5848	$^6/_{11}$	0,7385	0,8171
$^2/_5$	0,6325	0,7368	$^7/_{11}$	0,7977	0,8601
$^3/_5$	0,7746	0,8434	$^8/_{11}$	0,8528	0,8993
$^4/_5$	0,8944	0,9283	$^9/_{11}$	0,9045	0,9353
$^1/_6$	0,4082	0,5503	$^{10}/_{11}$	0,9535	0,9687
$^5/_6$	0,9129	0,9410	$^1/_{12}$	0,2887	0,4368
$^1/_7$	0,3780	0,5228	$^5/_{12}$	0,6455	0,7469
$^2/_7$	0,5345	0,6586	$^7/_{12}$	0,7638	0,8355
$^3/_7$	0,6547	0,7539	$^{11}/_{12}$	0,9574	0,9714
$^4/_7$	0,7559	0,8298	$^1/_{13}$	0,2774	0,4253
$^5/_7$	0,8452	0,8939	$^2/_{13}$	0,3922	0,5358
$^6/_7$	0,9258	0,9499	$^3/_{13}$	0,4804	0,6134
$^1/_8$	0,3536	0,5000	$^4/_{13}$	0,5547	0,6751
$^3/_8$	0,6124	0,7211	$^5/_{13}$	0,6202	0,7272
$^5/_8$	0,7906	0,8550	$^6/_{13}$	0,6794	0,7728
$^7/_8$	0,9354	0,9565	$^7/_{13}$	0,7338	0,8136
$^1/_9$	0,3333	0,4807	$^8/_{13}$	0,7845	0,8506
$^2/_9$	0,4714	0,6057	$^9/_{13}$	0,8321	0,8846
$^4/_9$	0,6667	0,7631	$^{10}/_{13}$	0,8771	0,9163
$^5/_9$	0,7454	0,8221	$^{11}/_{13}$	0,9199	0,9458
$^7/_9$	0,8819	0,9196	$^{12}/_{13}$	0,9608	0,9737
$^8/_9$	0,9428	0,9615	$^1/_{14}$	0,2673	0,4149
$^1/_{10}$	0,3162	0,4642	$^3/_{14}$	0,4629	0,5984
$^3/_{10}$	0,5477	0,6694	$^5/_{14}$	0,5976	0,7095
$^7/_{10}$	0,8367	0,8879	$^9/_{14}$	0,8018	0,8631
			$^{11}/_{14}$	0,8864	0,9228
$^9/_{10}$	0,9487	0,9655	$^{13}/_{14}$	0,9636	0,9756

Примеры: 1. $\sqrt[3]{^2/_7} = 0{,}6586$ прочитываем в столбце, озаглавленном сверху $\ll \sqrt[3]{\frac{p}{q}} \gg$ против $\frac{p}{q} = {}^2/_7$, находящихся в левом крайнем столбце.

2. $\sqrt{^1/_{10}} = 0{,}3162$ прочитываем в столбце, озаглавленном сверху $\ll \sqrt{\frac{p}{q}} \gg$ против $\frac{p}{q} = {}^1/_{10}$, находящейся в левом крайнем столбце.

Таблица 9

Длина дуги круга радиуса $R = 1$

(центральный угол в градах)

Грады	Дуга l	Грады	Дуга l	Грады	Дуга l	Грады	Дуга l
1	0,01571	26	0,4084	51	0,8011	76	1,1938
2	3142	27	4241	52	8168	77	2095
3	4712	28	4398	53	8325	78	2252
4	0,06283	29	0,4555	54	0,8482	79	1,2409
5	7854	30	4712	55	8639	80	2566
6	9425	31	4869	56	8796	81	2723
7	0,1100	32	0,5027	57	0,8954	82	1,2881
8	1257	33	5184	58	9111	83	3038
9	1414	34	5341	59	9268	84	3195
10	0,1571	35	0,5498	60	0,9425	85	1,3352
11	1728	36	5655	61	9582	86	3509
12	1885	37	5812	62	9739	87	3666
13	0,2042	38	0,5969	63	0,9896	88	1,3823
14	2199	39	6126	64	1,0053	89	3980
15	2356	40	6283	65	0210	90	4137
16	0,2513	41	0,6440	66	1,0367	91	1,4294
17	2670	42	6597	67	0524	92	4451
18	2827	43	6754	68	0681	93	4608
19	0,2985	44	0,6912	69	1,0838	94	1,4765
20	3142	45	7069	70	0996	95	4923
21	3299	46	7226	71	1153	96	5080
22	0,3456	47	0,7383	72	1,1310	97	1,5237
23	3613	48	7540	73	1467	98	5394
24	3770	49	7697	74	1624	90	5551
25	0,3927	50	0,7854	75	1,1781	100	1,5708

Пример. Для центрального угла 15 град дуга круга l радиуса $R = 1$ равна $l = 0,2356$, а дуга круга радиуса $R = 3,75$ равна $l = 0,01571 \times 3,75 = 0,0589$.

Таблица 10

Объем шара V для диаметров D от 1 до 120

D	$V=\frac{\pi D^3}{6}$	D	$V=\frac{\pi D^3}{6}$	D	$V=\frac{\pi D^3}{6}$	D	$V=\frac{\pi D^3}{6}$
1	0,5235988	31	15598,53	61	118847,0	91	394568,9
2	4,188790	32	17157,28	62	124788,2	92	407720,1
3	14,13717	33	18816,57	63	130924,3	93	421160,3
4	33,51032	34	20579,53	64	137258,2	94	434892,8
5	65,44985	35	22449,30	65	143793,3	95	448920,5
6	113,0973	36	24429,02	66	150532,6	96	463246,7
7	179,5944	37	26521,85	67	157479,1	97	477874,5
8	268,0826	38	28730,91	68	164636,2	98	492807,0
9	381,7035	39	31059,36	69	172006,9	99	508047,4
10	523,5988	40	33510,32	70	179594,4	100	523598,8
11	696,9100	41	36086,95	71	187401,8	101	539464,3
12	904,7787	42	38792,39	72	195432,2	102	555647,2
13	1150,347	43	41629,77	73	203688,8	103	572150,5
14	1436,755	44	44602,24	74	212174,8	104	588977,4
15	1767,146	45	47712,94	75	220893,2	105	606131,0
16	2144,660	46	50965,01	76	229847,3	106	623614,5
17	2572,441	47	54361,60	77	239040,1	107	641431,0
18	3053,628	48	57905,84	78	248474,9	108	659583,7
19	3591,364	49	61600,87	79	258154,6	109	678075,6
20	4188,790	50	65449,85	80	268082,6	110	696910,0
21	4849,048	51	69455,91	81	278261,8	111	716090,0
22	5575,280	52	73622,18	82	288695,6	112	735618,6
23	6370,626	53	77951,81	83	299387,0	113	755499,1
24	7238,229	54	82447,92	84	310339,1	114	775734,6
25	8181,231	55	87113,75	85	321555,1	115	796328,3
26	9202,772	56	91952,32	86	333038,2	116	817283,2
27	10305,99	57	96966,83	87	344791,4	117	838602,7
28	11494,04	58	102160,4	88	356817,9	118	860289,5
29	12770,05	59	107536,2	89	369120,9	119	882347,3
30	14137,17	60	113097,3	90	381703,5	120	904778,7

Пример. Объем шара V для диаметра $D=20$ (левый крайний столбец) равен $V = 4188{,}790$.

Таблица 11

Элементы сегмента круга

Цент. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
1	0,01745	0,00003808	0,01745	458,4	458,4	0,002182	1,0000	1,0000	0,0000004425	0,008727	0,00003808	0,00000
2	03491	01523	03490	229,2	229,2	4363	0001	0,9999	000003545	01746	0001523	00001
3	05236	03427	05235	152,8	152,8	6545	0001	9999	1196	02619	0003428	00002
4	06981	06092	06980	114,6	114,6	8728	0002	9998	2825	03492	0006095	00003
5	08727	09518	08724	91,69	91,66	0,01091	0003	9997	5536	04366	0009527	00005
6	0,1047	0,001370	0,1047	76,41	76,38	0,01309	1,0005	0,9995	0,00009564	0,05241	0,001372	0,0001
7	1222	001865	1221	65,50	65,46	1528	0006	9994	01518	06116	001869	0001
8	1396	002436	1395	57,32	57,27	1746	0008	9992	02266	06993	002442	0003
9	1571	003083	1569	50,96	50,90	1965	0010	9990	03226	07870	003092	0003
10	1745	003805	1743	45,87	45,81	2183	0013	9987	04453	08749	003820	0005
11	0,1920	0,004604	0,1917	41,70	41,64	0,02402	1,0015	0,9985	0,0005886	0,09629	0,004625	0,0006
12	2094	005478	2091	38,23	38,16	2620	0018	9982	007640	1051	005508	0008
13	2269	006428	2264	35,30	35,22	2839	0022	9978	009708	1139	006470	0009
14	2443	007454	2437	32,78	32,70	3058	0025	9975	01212	1228	007510	0013
15	2618	008555	2611	30,60	30,51	3277	0029	9971	01490	1317	008629	0016
16	0,2793	0,009732	0,2783	28,69	28,60	0,03496	1,0032	0,9968	0,001808	0,1405	0,009828	0,0017
17	2967	01098	2956	27,01	26,91	3716	0037	9963	02166	1495	01111	0023
18	3142	01231	3129	25,52	25,41	3935	0041	9959	02571	1584	01247	0026
19	3316	01371	3301	24,18	24,07	4155	0046	9954	03021	1673	01391	0030
20	3491	01519	3473	22,98	22,86	4374	0051	9949	03523	1763	01543	0035
21	0,3665	0,01675	0,3645	21,89	21,77	0,04594	1,0056	0,9994	0,004076	0,1853	0,01703	0,0041
22	3840	01837	3816	20,90	20,77	4814	0062	9939	04682	1944	01872	0048
23	4014	02008	3987	19,99	19,86	5035	0067	9933	05348	2035	02049	0056
24	4189	02185	4158	19,17	19,03	5255	0073	9927	06070	2126	02234	0063
25	4363	2370	4329	18,41	18,26	5476	0080	9921	06856	2217	02428	0071

Продолжение табл. 11

Цент. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
26	0,4538	0,02563	0,4499	17,71	17,55	0,05697	1,0086	0,9914	0,007707	0,2309	0,02630	0,0080
27	4712	02763	4669	17,06	16,90	05918	0093	9908	008625	2401	02842	0090
28	4887	02970	4838	16,45	16,29	06139	0100	9901	009610	2493	03061	0099
29	5061	03185	5008	15,89	15,72	06361	0108	9894	01067	2586	03290	0111
30	5236	03407	5176	15,37	15,19	06583	0115	9886	01180	2679	03528	0122
31	0,5411	0,03637	0,5345	14,88	14,70	0,06805	1,0123	0,9878	0,01301	0,2773	0,03774	0,0135
32	5585	03874	5513	14,42	14,23	07027	0131	9871	01429	2867	04030	0149
33	5760	04118	5680	13,99	13,79	0,7250	0140	9862	01566	2962	04295	0164
34	5934	04370	5847	13,58	13,38	07473	0149	9854	01711	3057	04569	0180
35	6109	04628	6014	13,20	12,99	07696	0158	9845	01864	3153	04853	0197
36	0,6283	0,04894	0,6180	12,84	12,63	0,07919	1,0167	0,9836	0,02027	0,3249	0,05146	0,0215
37	6458	05168	6346	12,50	12,28	08143	0176	9827	02198	3346	05449	0234
38	6632	05448	6511	12,17	11,95	08367	0186	9819	02378	3443	05762	0254
39	6807	05736	6676	11,87	11,64	08592	0196	9808	02568	3541	06085	0275
40	6981	06031	6840	11,58	11,34	08816	0206	9798	02767	3640	06418	0299
41	0,7156	0,06333	0,7004	11,30	11,06	0,09014	1,0217	0,9788	0,02976	0,3739	0,06761	0,0322
42	7330	06642	7167	11,04	10,79	09267	0227	9778	03195	3839	07114	0348
43	7505	06958	7330	10,79	10,53	09493	0239	9767	03425	3939	07479	0373
44	7679	07282	7492	10,55	10,29	09719	0250	9756	03664	4040	07853	0401
45	7854	07612	7654	10,32	10,05	09946	0262	9745	03915	4142	08239	0430
46	0,8029	0,07950	0,7815	10,10	9,830	0,1018	1,0274	0,9734	0,04176	0,4245	0,08639	0,0461
47	8203	08294	7975	9,890	9,615	1040	0286	9722	04448	4348	09044	0493
48	8378	08645	8135	9,690	9,409	1063	0299	9710	04731	4452	09464	0526
49	8552	09004	8294	9,498	9,211	1086	0311	9698	05025	4557	09895	0562
50	8727	09369	8452	9,314	9,021	1108	0325	9686	05331	4663	1034	0599

Цент. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
51	0,8901	0,09741	0,8610	9,138	9,839	0,1131	1,0338	0,9673	0,05649	0,4770	0,1079	0,0639
52	9076	1012	8767	8,968	663	1154	0352	9660	05978	4877	1126	0678
53	9250	1051	8924	804	494	1177	0365	9647	06319	4986	1174	0722
54	9425	1090	9080	647	331	1200	0380	9634	06673	5095	1223	0765
55	9599	1130	9235	496	173	1223	0394	9620	07039	5206	1274	0813
56	0,9774	0,1171	0,9389	8,350	8,022	0,1247	1,0410	0,9607	0,07417	0,5317	0,1326	0,0860
57	9948	1212	9543	209	7,875	1270	0425	9593	07808	5430	1379	0912
58	1,0123	1254	9696	074	733	1293	0440	9579	08212	5543	1434	0963
59	0297	1296	9848	7,943	597	1316	0456	9564	08629	5658	1490	1019
60	0472	1340	1,0000	816	464	1340	0472	9549	09059	5774	1547	1076
61	1,0647	0,1384	1,0151	7,694	7,336	0,1363	1,0489	0,9534	0,09502	0,5890	0,1606	0,1133
62	0821	1428	0301	576	212	1387	0505	9519	09958	6009	1666	1197
63	0996	1474	0450	462	091	1410	0522	9504	1043	6128	1728	1260
64	1170	1520	0598	7,351	6,975	1434	0540	9488	1091	6249	1792	1328
65	1345	1566	0746	245	862	1457	0557	9472	1141	6371	1857	1397
66	1,1519	0,1613	1,0893	7,140	6,752	0,1481	1,0575	0,9456	0,1192	0,6494	0,1924	0,1469
67	1694	1661	1039	040	645	1505	0593	9440	1244	6619	1992	1544
68	1868	1710	1184	6,942	542	1529	0612	9423	1298	6745	2062	1622
69	2043	1759	1328	847	441	1553	0631	9407	1353	6873	2134	1703
70	2217	1808	1472	756	343	1576	0650	9390	1410	7002	2208	1787
71	1,2392	0,1859	1,1614	6,666	6,248	0,1601	1,0670	0,9372	0,1468	0,7133	0,2283	0,1874
72	2566	1910	1756	580	155	1625	0690	9355	1528	7265	2361	1964
73	2741	1961	1896	496	065	1649	0710	9337	1589	7400	2440	2059
74	2915	2014	2036	414	5,977	1673	0730	9319	1651	7536	2521	2157
75	3090	2066	2175	335	892	1697	0751	9301	1715	7673	2605	2256

Продолжение табл. 11

Цент. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
76	1,3265	0,2120	1,2313	6,257	5,808	0,1722	1,0773	0,9283	0,1781	0,7813	0,2690	0,2361
77	3439	2174	2450	182	727	1746	0794	9264	1848	7954	2778	2469
78	3614	2229	2586	109	648	1771	0816	9245	1916	8098	2868	2582
79	3788	2284	2722	037	570	1795	0838	9226	1986	8243	2960	2698
80	3963	2340	2856	5,968	495	1820	0861	9207	2057	8391	3054	2819
81	1,4137	0,2396	1,2989	5,900	5,421	0,1845	1,0884	0,9188	0,2130	0,8541	0,3151	0,2945
82	4312	2453	3121	835	349	1869	0908	9168	2205	8693	3250	3074
83	4486	2510	3252	770	279	1894	0931	9148	2280	8847	3352	3208
84	4661	2569	3383	708	210	1919	0955	9128	2358	9004	3456	3347
85	4835	2627	3512	647	143	1944	0979	9108	2437	9163	3563	3491
86	1,5010	0,2686	1,3640	5,587	5,077	0,1970	1,1004	0,9088	0,2517	0,9325	0,3673	0,3640
87	5184	2746	3767	529	013	1995	1029	9067	2599	9490	3786	3796
88	5359	2807	3893	472	4,950	2020	1055	9046	2682	9657	3902	3955
89	5533	2867	4018	417	889	2046	1081	9025	2767	9827	4020	4121
90	5708	2929	4142	363	828	2071	1107	9003	2854	1,0000	4142	4292
91	1,5882	0,2991	1,4265	5,310	4,769	0,2097	1,1134	0,8982	0,2942	1,0176	0,4267	0,4470
92	6057	3053	4387	259	712	2122	1161	8960	3032	0355	4396	4653
93	6232	3116	4507	208	655	2148	1189	8938	3123	0538	4527	4844
94	6406	3180	4627	159	600	2174	1216	8916	3215	0724	4663	5042
95	6581	3244	4746	111	545	2200	1244	8894	3309	0913	4802	5245
96	1,6755	0,3309	1,4863	5,064	4,492	0,2226	1,1273	0,8871	0,3405	1,1106	0,4945	0,5457
97	6930	3374	4979	018	440	2252	1302	8848	3502	1303	5092	5676
98	7104	3439	5094	4,973	389	2279	1332	8825	3601	1504	5243	5904
99	7279	3506	5208	929	338	2305	1362	8802	3701	1708	5398	6137
100	7453	3572	5321	886	289	2332	1392	8778	3803	1918	5557	6383

Продолжение табл. 11

Цент. угол $\alpha°$	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
101	1,7628	0,3639	1,5432	4,844	4,241	0,2358	1,1423	0,8755	0,3906	1,2131	0,5721	0,6634
102	7802	3707	5543	803	193	2385	1454	8731	4010	2349	5890	6896
103	7977	3775	5652	762	146	2412	1485	8707	4117	2572	6064	7167
104	8151	3843	5760	723	101	2439	1516	8683	4224	2799	6243	7447
105	8326	3912	5867	684	056	2466	1550	8658	4333	3032	6427	7738
106	1,8500	0,3982	1,5973	4,646	4,011	0,2493	1,1583	0,8633	0,4444	1,3270	0,6616	0,8040
107	8675	4052	6077	609	3,968	2520	1616		4556	3514	6812	8353
108	8850	4122	6180	573	925	2548	1650		4669	3764	7013	8678
109	9024	4193	6282	537	883	2575	1684		4784	4019	7221	9014
110	9199	4264	6383	502	842	2603			4901	4281	7434	9363
111	1,9373	0,4336	1,6483	4,468	3,801	0,2631			0,5019	1,4550	0,7655	0,9727
112	9548	4408	6581	435	761	2659			5138	4826	7883	1,0104
113	9722	4481	6678	402	722	2687			5259	5108	8118	0494
114	9897	4554	6773	369	683	2717			5381	5399	8361	0901
115	2,007	4627	6868	338	645				5504	5697	8612	132
116	2,025	0,4701	1,6961	4,307	3,608			77	0,5629	1,6003	0,8871	1,176
117	042	4775	7053	277	571			51	5755	6319	9139	222
118	059	4850	7143	247	5			24	5883	6643	9416	270	
119	077	4925	7233	217				297	6012	6977	9703	318
120	094	5000	7321	189				8270	6142	7321	1,0000	1,370
121	2,112	0,5076	1,7407	4,161				0,8243	0,6273	1,7675	1,0308	423
122	129	5152	7492	134			73	8215	6406	8040	0627	479
123	147	5228	7576	106			14	8187	6540	8418	0957	537
124	164	5305	7659	079			2256	8159	6676	8807	1301	597
125	182	5383	7740	053			2298	8131	6813	9210	1657	660

Продолжение табл. 11.

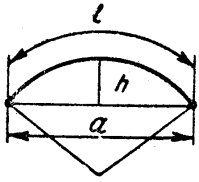
Цент. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$			$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
126	199	0,5460	1,7820	4,028	3,26			0,8103	0,6950	1,9626	1,2027	1.726
127	217	5538	7899	002	232			8075	7090	2,006	2412	795
128	234	5616	7976	3,978	201			046	7230	050	2812	866
129	251	5695	8052	954	170			18	7372	097	3228	943
130	2,269	5774	8126	930	140			89	7514	145	3662	2,021
131	2,286	0,5853	1,8199	3,906	3,109				0,7658	2,194	1,4114	2,102
132	304	5933	8271	883	080				7803	246	4586	188
133	321	6013	8341	861	051	32			7950	300	5078	279
134	339	6093	8410	839	022	3309			8097	356	5593	373
135	356	6173	8478	817	993	3341			8245	414	6131	472
136	2,374	0,6254	1,8544	3,795	2,965	0,3373	1,		0,8395	2,475	1,6695	2,576
137	391	6335	8608	774	937	3404	2o		8546	539	7285	687
138	409	6416	8672	754	910	3436	290		8697	605	7904	801
139	426	6498	8733	734	883	3469	2950		8850	675	8555	924
140	443	6580	8794	714	856	3501	3000		9003	747	9238	3,051
141	2,461	0,6662	1,8853	3,694	2,830	0,3534	1,3054	0,7661	0,9158	2,824	1,9957	3,187
142	478	6744	8910	675	804	3566	3106	7630	9314	904	2,072	330
143	496	6827	8966	656	778	3599	3159	7599	9470	989	152	482
144	513	6910	9021	637	753	3633	3213	7568	9627	3,078	236	643
145	531	6993	9074	619	728	3666	3268	7537	9786	172	326	813
146	2,548	0,7076	1,9126	3,601	2,703	0,3700	1,3323	0,7506	0,9945	3,271	2,420	3,994
147	566	7160	9176	583	678	3734	3379	7474	1,0105	376	521	4,186
148	583	7244	9225	566	654	3768	3436	7443	0266	487	628	391
149	601	7328	9273	549	630	3802	3493	7411	0428	606	742	611
150	618	7412	9319	532	606	3837	3552	7379	0590	732	864	846

Цент. угол α°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды a	$\frac{l}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{a}{l}$	Площадь сегмента S	Длина касательной T	Биссектриса $Б$	$2T-l$
151	2,635	0,7496	1,9363	3,516	2,583	0,3871	1,3611	0,7347	1,0753	3,867	2,994	5,099
152	653	7581	9406	500	560	3906	3671	7315	0917	4,011	3,134	369
153	670	7666	9447	484	537	3942	3731	7283	1082	165	284	660
154	688	7750	9487	468	514	3977	3793	7250	1247	331	445	974
155	705	7836	9526	453	492	4013	3855	7218	1413	511	620	317
156	2,723	0,7921	1,9563	3,437	2,470	0,4049	1,3918	0,7185	1,1580	4,705	3,810	6,687
157	2,740	8006	9593	423	448	4085	3982	7152	1747	4,915	4,016	7,090
158	758	8092	9633	408	426	4122	4046	7119	1915	5,145	241	532
159	775	8178	9665	393	405	4158	4112	7086	2084	396	487	8,017
160	793	8264	9696	379	383	4195	4178	7053	2253	671	759	549
161	810	0,8350	1,9726	3,365	2,362	0,4233	1,4245	0,7020	1,2422	976	5,059	9,142
162	2,827	8436	9754	352	342	4270	4313	6986	2592	6,314	5,392	9,801
163	845	8522	9780	338	321	4308	4382	6953	2763	691	765	10,537
164	862	8608	9805	325	301	4346	4452	6919	2934	7,115	6,185	11,368
165	880	8695	9829	312	281	4385	4523	6886	3105	596	661	12,312
166	897	0,8781	1,9851	3,299	2,261	0,4424	1,4594	0,6852	1,3277	8,144	7,206	13,391
167	2,915	8868	9871	287	241	4463	4668	6818	3449	8,777	7,834	14,639
168	932	8955	9890	274	221	4502	4742	6784	3621	9,514	8,567	16,096
169	950	9042	9908	262	202	4542	4816	6749	3794	10,39	9,433	17,83
170	967	9128	9924	250	183	4582	4892	6715	3967	11,43	10,47	19,89
171	985	0,9215	1,9938	3,239	2,164	0,4622	1,4969	0,6681	1,4140	12,71	11,75	22,44
172	3,002	9302	9951	227	145	4663	5047	6646	4314	14,30	13,34	25,60
173	019	9390	9963	216	126	4704	5125	6611	4488	16,35	15,38	29,69
174	037	9477	9973	205	108	4745	5205	6577	4662	19,08	18,11	35,12
175	054	9564	9981	194	089	4786	5286	6542	4836	22,90	21,93	42,75
176	072	0,9651	1,9988	3,183	2,071	0,4828	1,5368	0,6507	1,5010	28,64	27,65	54,21
177	3,089	9738	9993	172	053	4871	5451	6472	5184	38,19	37,20	73,29
178	107	9825	9997	162	035	4913	5536	6437	5359	57,29	56,30	111,47
179	124	9913	9999	152	018	4957	5621	6402	5533	114,6	113,6	226,1
180	3,142	1,0000	2,0000	142	000	5000	5708	6366	5708	∞	∞	—

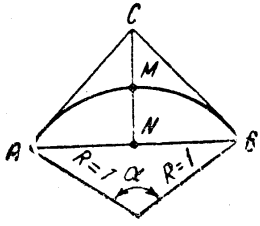
Таблица 12

Длина дуги и площадь сегмента для хорды $a = 1$

$\frac{h}{a}$	Длина дуги l	Площадь сегмента S	$\frac{h}{a}$	Длина дуги l	Площадь сегмента S
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	0011	0133	0,27	1843	1901
0,03	0024	0200	0,28	1975	1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	0067	0334	0,30	2250	2137
0,06	0096	0401	0,31	2393	2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	0170	0536	0,33	2689	2381
0,09	0215	0604	0,34	2843	2464
0,10	1,0265	0,0672	0,35	1,3000	0,2548
0,11	0320	0740	0,36	3160	2633
0,12	0380	0809	0,37	3323	2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	0515	0948	0,39	3660	2893
0,15	0590	1018	0,40	3832	2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	0754	1159	0,42	4186	3162
0,18	0843	1231	0,43	4367	3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1035	1375	0,45	4738	3441
0,21	1137	1448	0,46	4927	3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1356	1596	0,48	5313	3729
0,24	1471	1671	0,49	5509	3828
0,25	1,1591	0,1747	0,50	1,5708	0,3927



Пример. Для $h=0{,}40$ длина дуги $l=1{,}3832$, а площадь сегмента $S = 0{,}2982$.



Пример к табл. 11. Для центрального угла $\alpha=15°$ (левая крайняя колонка) длина дуги $\overset{\frown}{AB}=l=0{,}2618$, стрелка $MN = h = 0{,}008555$, длина хорды $AB=a=0{,}2611$, длина касательной $AC = BC = T = 0{,}1317$, биссектриса $CM=Б=$ $=0{,}008629$ (стр. 397).

Таблица 13

Элементы правильных многоугольников

n	Центр. угол $\alpha°$	Сторона мн-ка a	Радиус впис. окр. r	Периметр мн-ка p	Площадь мн-ка S	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{a}$
3	120,00	1,7321	0,5000	5,196	1,2990	0,4330	5,196	0,5774	2,000	3,464	0,2887
4	90,00	4142	7071	657	2,000	1,0000	4,000	7071	1,4142	2,000	5000
5	72,00	1756	8090	878	378	1,7205	3,633	8507	2361	1,4531	6882
6	60,00	1,0000	0,8660	6,000	2,598	2,598	3,464	1,0000	1,1547	1,1547	0,8660
7	51,43	0,8678	9010	074	736	3,634	371	1524	1099	0,9632	1,0383
8	45,00	7654	9239	123	828	4,828	314	3066	0824	8284	2071
9	40,00	0,6840	0,9397	6,156	2,893	6,182	3,276	1,4619	1,0642	0,7279	1,3737
10	36,00	6180	9511	180	939	7,694	249	6180	0515	6498	5388
11	32,73	5635	9595	198	974	9,366	230	7747	0422	5873	7028
12	30,00	0,5176	0,9659	6,212	3,000	11,20	3,215	1,9319	1,0353	0,5359	1,8660
13	27,69	4786	9709	222	021	13,19	204	2,089	0299	4930	2,029
14	25,71	4450	9750	231	037	15,33	195	247	0257	4565	191
15	24,00	0,4158	0,9781	6,237	3,051	17,64	3,188	2,405	1,0223	0,4251	2,352
16	22,50	3902	9808	243	061	20,11	183	563	0196	3978	514
17	21,18	3675	9830	247	071	22,74	178	721	0173	3739	675
18	20,00	0,3473	0,9848	6,251	3,078	25,52	3,174	2,879	1,0154	0,3527	2,836
19	18,95	3292	9864	255	085	28,46	171	3,038	0138	3337	996
20	18,00	3129	9877	257	090	31,57	168	196	0125	3168	3,157
21	17,15	0,2981	0,9888	6,260	3,095	34,83	3,165	3,355	1,0113	0,3015	3,317
22	16,36	2846	9898	262	099	38,25	163	513	0103	2876	478
23	15,65	2723	9907	264	103	41,83	161	672	0094	2749	638
24	15,00	0,2611	0,9914	6,265	3,106	45,57	3,160	3,831	1,0086	0,2633	3,798
25	14,40	2507	9921	267	109	49,47	158	989	0080	2527	958

Пример. Для многоугольника с числом сторон $n=21$ имеем: $\alpha = 17°,15$, $a = 0,2981$, $r = 0,9888$, $p = 6,260$, $S = 3,095$, $\frac{S}{a^2} = 34,83$, $\frac{R}{a} = 3,355$, $\frac{r}{a} = 3,317$

Таблица 14

Факториалы, обратные им величины и логарифмы

n	$n!$	$1 : n!$	$\lg n!$	n	$n!$	$1 : n!$	$\lg n!$
1	1	1,0000	0,0000	21	$5109 \cdot 10^{16}$	$1957 \cdot 10^{-23}$	19,7083
2	2	0,5000	0,3010	22	$1124 \cdot 10^{18}$	$8897 \cdot 10^{-24}$	21,0508
3	6	0,1667	0,7782	23	$2585 \cdot 10^{19}$	$3868 \cdot 10^{-26}$	$22,4125$
4	24	$4167 \cdot 10^{-5}$	1,3802	24	$6204 \cdot 10^{20}$	$1612 \cdot 10^{-27}$	23,7927
5	120	$8333 \cdot 10^{-6}$	2,0792	25	$1551 \cdot 10^{22}$	$6467 \cdot 10^{-29}$	25,1906
6	720	$1389 \cdot 10^{-6}$	2,8573	26	$4033 \cdot 10^{23}$	$2480 \cdot 10^{-30}$	26,6056
7	5040	$1984 \cdot 10^{-7}$	3,7024	27	$1089 \cdot 10^{25}$	$9184 \cdot 10^{-32}$	28,0370
8	$4032 \cdot 10$	$2480 \cdot 10^{-8}$	4,6055	28	$3049 \cdot 10^{26}$	$3280 \cdot 10^{-33}$	29,4841
9	$3629 \cdot 10^{2}$	$2756 \cdot 10^{-9}$	5,5598	29	$8842 \cdot 10^{27}$	$1131 \cdot 10^{-34}$	30,9466
10	$3629 \cdot 10^{3}$	$2756 \cdot 10^{-10}$	6,5598	30	$2653 \cdot 10^{29}$	$3770 \cdot 10^{-36}$	32,4237
11	$3992 \cdot 10^{4}$	$2505 \cdot 10^{-11}$	7,6012	31	$8223 \cdot 10^{30}$	$1216 \cdot 10^{-37}$	33,9156
12	$4790 \cdot 10^{5}$	$2088 \cdot 10^{-12}$	8,6803	32	$2631 \cdot 10^{32}$	$3800 \cdot 10^{-39}$	35,4201
13	$6227 \cdot 10^{6}$	$1606 \cdot 10^{-13}$	9,7943	33	$8683 \cdot 10^{33}$	$1152 \cdot 10^{-40}$	36,9387
14	$8718 \cdot 10^{7}$	$1147 \cdot 10^{-14}$	10,9404	34	$2952 \cdot 10^{35}$	$3387 \cdot 10^{-42}$	38,4701
15	$1308 \cdot 10^{9}$	$7647 \cdot 10^{-16}$	12,1166	35	$1033 \cdot 10^{37}$	$9678 \cdot 10^{-44}$	40,0141
16	$2092 \cdot 10^{10}$	$4779 \cdot 10^{-17}$	13,3206	36	$3720 \cdot 10^{38}$	$2688 \cdot 10^{-45}$	41,5705
17	$3557 \cdot 10^{11}$	$2811 \cdot 10^{-18}$	14,5511	37	$1376 \cdot 10^{40}$	$7265 \cdot 10^{-47}$	43,1386
18	$6402 \cdot 10^{12}$	$1562 \cdot 10^{-19}$	15,8063	38	$5230 \cdot 10^{41}$	$1912 \cdot 10^{-48}$	44,7185
19	$1216 \cdot 10^{14}$	$8221 \cdot 10^{-21}$	17,0851	39	$2040 \cdot 10^{43}$	$4902 \cdot 10^{-50}$	46,3096
20	$2433 \cdot 10^{15}$	$4110 \cdot 10^{-22}$	18,3861	40	$8159 \cdot 10^{44}$	$1226 \cdot 10^{-51}$	47,9116

Пример. Для $n = 18$ находим $n! = 6402 \times 10^{12}$, $1 : n! = 1562 \times 10^{-19}$, $\lg n! = 15,8063$.

Таблица 15

Мантиссы десятичных логарифмов чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
10	0 000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	64$\bar{5}$	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	·004	·038	·072	·106
13	1 139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	·014
16	2 041	068	095	122	148	17$\bar{5}$	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	62$\bar{5}$	648	672	695	718	742	76$\bar{5}$
19	2 788	810	833	856	878	900	923	94$\bar{5}$	967	989
20	3 010	032	054	07$\bar{5}$	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	34$\bar{5}$	36$\bar{5}$	38$\bar{5}$	404
22	3 424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	65$\bar{5}$	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	94$\bar{5}$	962
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
30	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0	27,0
31	3,1	6,2	9,3	12,4	15,5	18,6	21,7	24,8	27,9
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
40	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	36,0
41	4,1	8,2	12,3	16,4	20,5	24,6	28,7	32,8	36,9
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7

Продолжение табл. 15

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	3 979	997	·014	·031	·048	·065	·082	·099	·116	·133
26	4 $\bar{1}$50	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	42$\bar{5}$	440	456
28	4 472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	4 914	928	942	955	969	983	997	·011	·024	·038
32	5 051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	5 31$\bar{5}$	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	63$\bar{5}$	647	658	670
37	5 682	694	705	717	729	740	752	763	77$\bar{5}$	786
38	798	809	821	832	843	85$\bar{5}$	866	877	888	899
39	911	922	933	944	95$\bar{5}$	966	977	988	999	·010
40	6 021	031	042	053	064	07$\bar{5}$	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	32$\bar{5}$
43	6 33$\bar{5}$	34$\bar{5}$	35$\bar{5}$	36$\bar{5}$	37$\bar{5}$	38$\bar{5}$	39$\bar{5}$	40$\bar{5}$	41$\bar{5}$	42$\bar{5}$
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
11	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
21	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	14,7	16,8	18,9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5

Продолжение табл. 15

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6 628	637	646	656	665	675̄	68	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	6 902	911	920	928	937	946	955̄	964	972	981
50	990	998	·007	·016	·024	·033	·042	·050	·059	·067
51	7 076	084	093	101	110	118	126	135̄	143	152
52	7 160	168	177	185	193	202	210	218	226	235̄
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	7 404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	7 634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	782	789	796	803	810	818	825̄	832	839	846
61	7 853	860	868	875̄	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945̄	952	959	966	973	980	987
63	993	·000	·007	·014	·021	·028	·035̄	·041	·048	·055
64	8 062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235̄	241	248	254
67	8 261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395̄	401	407	414	420	426	432	439	445̄
70	8 451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525̄	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	8 633	639	645	651	657	663	669	675̄	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745̄
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4
7	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3
8	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1

*Продолжение табл. 15**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	8 751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	86$\bar{5}$	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	8 921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	·004	·009	·01$\bar{5}$	·020	·025
80	9 031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	9 08$\bar{5}\bar{5}$	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	16$\bar{5}$	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	9 243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	294	299	304	309	31$\bar{5}$	320	32$\bar{5}$	330	33$\bar{5}$	340
86	34$\bar{5}$	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	9 395	400	405	410	415	420	425	430	43$\bar{5}$	440
88	44$\bar{5}$	4$\bar{5}$0	45$\bar{5}$	460	46$\bar{5}$	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	9 542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	60$\bar{5}$	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	9 68$\bar{5}$	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	7$\bar{5}$0	754	759	763	768	773
95	777	782	786	791	795	800	80$\bar{5}$	809	814	818
96	9 823	827	832	836	841	845	8$\bar{5}$0	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	9 956	961	965	969	974	978	983	987	991	996
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4

*Способ пользования табл. 15 см. на стр. 333.

Таблица 16*

Антилогарифмы чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	1,000	002	005	007	009	012	014	016	019	021
,01	1,023	026	028	030	033	035	038	040	042	045
02	047	050	052	054	057	059	062	064	067	069
03	072	074	076	079	081	084	086	089	091	094
,04	1,096	099	102	104	107	109	112	114	117	119
05	122	125	127	130	132	135	138	140	143	146
06	148	151	153	156	159	161	164	167	169	172
,07	1,175	178	180	183	186	189	191	194	197	199
08	202	205	208	211	213	216	219	222	225	227
09	230	233	236	239	242	245	247	250	253	256
,10	1,259	262	265	268	271	274	276	279	282	285
11	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315
12	318	321	324	327	330	334	337	340	343	346
,13	1,349	352	355	358	361	365	368	371	374	377
14	380	384	387	390	393	396	400	403	406	409
15	413	416	419	422	426	429	432	435	439	442
,16	1,445	449	452	455	459	462	466	469	472	476
17	479	483	486	489	493	496	500	503	507	510
18	514	517	521	524	528	531	535	538	542	545
,19	1,549	552	556	560	563	567	570	574	578	581
20	585	589	592	596	600	603	607	611	614	618
21	622	626	629	633	637	641	644	648	652	656
,22	1,660	663	667	671	675	679	683	687	690	694
23	698	702	706	710	714	718	722	726	730	734
24	738	742	746	750	754	758	762	766	770	774
,25	1,778	782	786	791	795	799	803	807	811	816
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
3	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7
4	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5

* Способ пользования табл. 16 см. на стр. 335.

Продолжение табл. 16

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,25	1,778	782	786	791	795	799	803	807	811	816
,26	1,820	824	828	832	837	841	845	849	854	858
27	862	866	871	875	879	884	888	892	897	901
28	905	910	914	919	923	928	932	936	941	945
,29	1,950	954	959	963	968	972	977	982	986	991
30	995	·000	·004	·009	·014	·018	·023	·028	·032	·037
31	2,042	046	051	056	061	065	070	075	080	084
,32	2,089	094	099	104	109	113	118	123	128	133
33	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183
34	188	193	198	203	208	213	218	223	228	234
,35	2,239	244	249	254	259	265	270	275	280	286
36	291	296	301	307	312	317	323	328	333	339
37	344	350	355	360	366	371	377	382	388	393
,38	2,399	404	410	415	421	427	432	438	443	449
39	455	460	466	472	477	483	489	495	500	506
40	512	518	523	529	535	541	547	553	559	564
,41	2,570	576	582	588	594	600	606	612	618	624
42	630	636	642	649	655	661	667	673	679	685
43	692	698	704	710	716	723	729	735	742	748
,44	2,754	761	767	773	780	786	793	799	805	812
45	818	825	831	838	844	851	858	864	871	877
46	884	891	897	904	911	917	924	931	938	944
,47	2,951	958	965	972	979	985	992	999	·006	·013
48	3,020	027	034	041	048	055	062	069	076	083
49	090	097	105	112	119	126	133	141	148	155
,50	3,162	170	177	184	192	199	206	214	221	228
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4
7	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3
8	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2

Продолжение табл. 16

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,50	3,162	170	177	184	192	199	206	214	221	228
,51	3,236	243	251	258	266	273	281	289	296	304
52	311	319	327	334	342	350	357	365	373	381
53	388	396	404	412	420	428	436	443	451	459
,54	3,467	475	483	491	499	508	516	524	532	540
55	548	556	565	573	581	589	597	606	614	622
56	631	639	648	656	664	673	681	690	698	707
,57	3,715	724	733	741	750	758	767	776	784	793
58	802	811	819	828	837	846	855	864	873	882
59	890	899	908	917	926	936	945	954	963	972
,60	3,981	990	999	·009	·018	·027	·036	·046	·055	·064
61	4,074	083	093	102	111	121	130	140	150	159
62	169	178	188	198	207	217	227	236	246	256
,63	4,266	276	285	295	305	315	325	335	345	355
64	365	375	385	395	406	416	426	436	446	457
65	467	477	487	498	508	519	529	539	550	560
,66	4,571	581	592	603	613	624	634	645	656	667
67	677	688	699	710	721	732	742	753	764	775
68	786	797	808	819	831	842	853	864	875	887
,69	4,898	909	920	932	943	955	966	977	989	·000
70	5,012	023	035	047	058	070	082	093	105	117
71	129	140	152	164	176	188	200	212	224	236
,72	5,248	260	272	284	297	309	321	333	346	358
73	370	383	395	408	420	433	445	458	470	483
74	495	508	521	534	546	559	572	585	598	610
,75	5,623	636	649	662	675	689	702	715	728	741
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3
8	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
10	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
11	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7

Продолжение табл. 16

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,75	5,623	636	649	662	675	689	702	715	728	741
76	754	768	781	794	808	821	834	848	861	875
77	888	902	916	929	943	957	970	984	998	·012
,78	6,026	039	053	067	081	095	109	124	138	152
79	166	180	194	209	223	237	252	266	281	295
80	310	324	339	353	368	383	397	412	427	442
,81	6,457	471	486	501	516	531	546	561	577	592
82	607	622	637	653	668	683	699	714	730	745
83	761	776	792	808	823	839	855	871	887	902
,84	6,918	934	950	966	982	998	·015	·031	·047	·063
85	7,079	096	112	129	145	161	178	194	211	228
86	244	261	278	295	311	328	345	362	379	396
,87	7,413	430	447	464	482	499	516	534	551	568
88	586	603	621	638	656	674	691	709	727	745
89	762	780	798	816	834	852	870	889	907	925
,90	7,943	962	980	998	·017	·035	·054	·072	·091	·110
91	8,128	147	166	185	204	222	241	260	279	299
92	318	337	356	375	395	414	433	453	472	492
,93	8,511	531	551	570	590	610	630	650	670	690
94	710	730	750	770	790	810	831	851	872	892
95	913	933	954	974	995	·016	·036	·057	·078	·099
,96	9,120	141	162	183	204	226	247	268	290	311
97	333	354	376	397	419	441	462	484	506	528
98	550	572	594	616	638	661	683	705	727	750
,99	9,772	795	817	840	863	886	908	931	954	977
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
20	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0
21	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	14,7	16,8	18,9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7

Десятичные логарифмы тригонометрических функций

sin

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	′
0	$-\infty$	8,2419	8,5428	8,7188	8,8436	8,9403	60
1	6,4637	2490	5464	7212	8454	9417	59
2	7648	2561	$\bar{5}500$	7236	8472	9432	58
3	6,9408	8,2630	8,5535	8,7260	8,8490	8,9446	57
4	7,0658	2699	5571	7283	8508	9460	56
5	1627	2766	5605	7307	8525	$947\bar{5}$	55
6	7,2419	8,2832	8,5640	8,7330	8,8543	8,9489	54
7	3088	2898	5674	7354	8560	9503	53
8	3668	2962	5708	7377	8578	9517	52
9	7,4180	8,3025	8,5742	8,7400	8,8595	8,9531	51
10	4637	3088	5776	7423	8613	$954\bar{5}$	50
11	5051	$31\bar{5}0$	5809	7445	8630	9559	49
12	7,5429	8,3210	8,5842	8,7468	8,8647	8,9573	48
13	5777	3270	$587\bar{5}$	7491	$866\bar{5}$	9587	47
14	6099	3329	5907	7513	8682	9601	46
15	7,6398	8,3388	8,5939	8,7535	8,8699	8,9614	45
16	6678	3445	5972	7557	8716	9628	44
17	6942	3502	6003	7580	8733	9642	43
18	7,7190	8,3558	$8,603\bar{5}$	8,7602	8,8749	8,9655	42
19	$742\bar{5}$	3613	6066	7623	8766	9669	41
20	7648	3668	6097	7645	8783	9682	40
21	7,7859	8,3722	8,6128	8,7667	8,8799	8,9696	39
22	8061	$377\bar{5}$	6159	7688	8816	9709	38
23	$825\bar{5}$	3828	6189	7710	8833	9723	37
24	7,8439	8,3880	8,6220	8,7731	8,8849	8,9736	36
25	8617	3931	$62\bar{5}0$	7752	8865	$97\bar{5}0$	35
26	8787	3982	6279	7773	8882	9763	34
27	7,8951	8,4032	8,6309	8,7794	8,8898	8,9776	33
28	9109	4082	6339	7815	8914	9789	32
29	9261	4131	6368	7836	8930	9803	31
30	7,9408	8,4179	8,6397	8,7857	8,8946	8,9816	30
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	′

cos

* Способ пользования табл. 17 см. на стр. 333.

sin

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	′
30	7,9408	8,4179	8,6397	8,7857	8,8946	8,9816	30
31	9551	4227	6426	7877	8962	9829	29
32	9689	4275	6454	7898	8978	9842	28
33	7,9822	8,4322	8,6483	8,7918	8,8994	8,9855	27
34	9952	4368	6511	7939	9010	9868	26
35	8,0078	4414	6539	7959	9026	9881	25
36	8,0200	8,4459	8,6567	8,7979	8,9042	8,9894	24
37	0319	4504	6595	7999	9057	9907	23
38	0435	4549	6622	8019	9073	9919	22
39	8,0548	8,4593	8,6650	8,8039	8,9089	8,9932	21
40	0658	4637	6677	8059	9104	9945	20
41	0765	4680	6704	8078	9119	9958	19
42	8,0870	8,4723	8,6731	8,8098	8,9135	8,9970	18
43	0972	4765	6758	8117	9150	9983	17
44	1072	4807	6784	8137	9166	9996	16
45	8,1169	8,4848	8,6810	8,8156	8,9181	9,0008	15
46	1265	4890	6837	8175	9196	0021	14
47	1358	4930	6863	8194	9211	0033	13
48	8,1450	8,4971	8,6889	8,8213	8,9226	9,0046	12
49	1539	5011	6914	8232	9241	0058	11
50	1627	5050	6940	8251	9256	0070	10
51	8,1713	8,5090	8,6965	8,8270	8,9271	9,0083	9
52	1797	5129	6991	8289	9286	0095	8
53	1880	5167	7016	8307	9301	0107	7
54	8,1961	8,5206	8,7041	8,8326	8,9315	9,0120	6
55	2041	5243	7066	8345	9330	0132	5
56	2119	5281	7090	8363	9345	0144	4
57	8,2196	8,5318	8,7115	8,8381	8,9359	9,0156	3
58	2271	5355	7140	8400	9374	0168	2
59	2346	5392	7164	8418	9388	0180	1
60	8,2419	8,5428	8,7188	8,8436	8,9403	9,0192	0
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	′

cos

tg

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	′
0	$-\infty$	8,2419	8,5431	8,7194	8,8446	8,9420	60
1	6,4637	2491	5467	7218	8465	9434	59
2	7648	2562	5503	7242	8483	9449	58
3	6,9408	8,2631	8,5538	8,7266	8,8501	8,9463	57
4	7,0658	2700	5573	7290	8518	9477	56
5	1627	2767	5608	7313	8536	9492	55
6	7,2419	8,2833	8,5643	8,7337	8,8554	8,9506	54
7	3088	2899	5677	7360	8572	9520	53
8	3668	2963	5711	7383	8589	9534	52
9	7,4180	8,3026	8,5745	8,7406	8,8607	8,9549	51
10	4637	3089	5779	7429	8624	9563	50
11	5051	3150	5812	7452	8642	9577	49
12	7,5429	8,3211	8,5845	8,7475	8,8659	8,9591	48
13	5777	3271	5878	7497	8676	9605	47
14	6099	3330	5911	7520	8694	9619	46
15	7,6398	8,3389	8,5943	8,7542	8,8711	8,9633	45
16	6678	3446	5975	7565	8728	9646	44
17	6942	3503	6007	7587	8745	9660	43
18	7,7190	8,3559	8,6038	8,7609	8,8762	8,9674	42
19	7425	3614	6070	7631	8778	9688	41
20	7648	3669	6101	7652	8795	9701	40
21	7,7860	8,3723	8,6132	8,7674	8,8812	8,9715	39
22	8062	3776	6163	7696	8829	9729	38
23	8255	3829	6193	7717	8845	9742	37
24	7,8439	8,3881	8,6223	8,7739	8,8862	8,9756	36
25	8617	3932	6254	7760	8878	9769	35
26	8787	3983	6283	7781	8895	9782	34
27	7,8951	8,4033	8,6313	8,7802	8,8911	8,9796	33
28	9109	4083	6343	7823	8927	9809	32
29	9261	4132	6372	7844	8944	9823	31
30	7,9409	8,4181	8,6401	8,7865	8,8960	8,9836	30
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	′

ctg

tg

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	′
30	7,9409	8,4181	8,6401	8,7865	8,8960	8,9836	30
31	9551	4229	6430	7886	8976	9849	29
32	9689	4276	6459	7906	8992	9862	28
33	7,9823	8,4323	8,6487	8,7927	8,9008	8,9875	27
34	9952	4370	6515	7947	9024	9888	26
35	8,0078	4416	6544	7967	9040	9901	25
36	8,0200	8,4461	8,6571	8,7988	8,9056	8,9915	24
37	0319	4506	6599	8008	9071	9928	23
38	0435	4551	6627	8028	9087	9940	22
39	8,0548	8,4595	8,6654	8,8048	8,9103	8,9953	21
40	0658	4638	6682	8067	9118	9966	20
41	0765	4682	6709	8087	9134	9979	19
42	8,0870	8,4725	8,6736	8,8107	8,9150	8,9992	18
43	0972	4767	6762	8126	9165	9,0005	17
44	1072	4809	6789	8146	9180	0017	16
45	8,1170	8,4851	8,6815	8,8165	8,9196	9,0030	15
46	1265	4892	6842	8185	9211	0043	14
47	1359	4933	6868	8204	9226	0055	13
48	8,1450	8,4973	8,6894	8,8223	8,9241	9,0068	12
49	1540	5013	6920	8242	9256	0080	11
50	1627	5053	6945	8261	9272	0093	10
51	8,1713	8,5092	8,6971	8,8280	8,9287	9,0105	9
52	1798	5131	6996	8299	9302	0118	8
53	1880	5170	7021	8317	9316	0130	7
54	8,1962	8,5208	8,7046	8,8336	8,9331	9,0143	6
55	2041	5246	7071	8355	9346	0155	5
56	2120	5283	7096	8373	9361	0167	4
57	8,2196	8,5321	8,7121	8,8392	8,9376	9,0180	3
58	2272	5358	7145	8410	9390	0192	2
59	2346	5394	7170	8428	9405	0204	1
60	8,2419	8,5431	8,7194	8,8446	8,9420	9,0216	0
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	′

ctg

α	sin	*d*	tg	*d. c.*	ctg	cos	*d*	α
0° 00′	−∞		−∞		+∞	10,0000	0	90° 00′
10	7,4637	3011	7,4637	3011	2,5363	0000	0	50
20	7648	1760	7648	1761	2352	0000	0	40
0° 30′	7,9408	1250	7,9409	1249	2,0591	10,0000	0	89° 30′
40	8,0658	969	8,0658	969	1,9342	0000	0	20
50	1627		1627		8373	0000		10
		792		792			0	
1° 00′	8,2419	669	8,2419	670	1,7581	9,9999	0	89° 00′
10	3088	580	3089	580	6911	9999	0	50
20	3668	511	3669	512	6331	9999	0	40
1° 30′	8,4179	458	8,4181	457	1,5819	9,9999	1	88° 30′
40	4637	413	4638	415	5362	9998	0	20
50	5050		5053		4947	9998		10
		378		378			1	
2° 00′	8,5428	348	8,5431	348	1,4569	9,9997	0	88° 00′
10	5776	321	5779	322	4221	9997	1	50
20	6097	300	6101	300	3899	9996	0	40
2° 30′	8,6397	280	8,6401	281	1,3599	9,9996	1	87° 30′
40	6677	263	6682	263	3318	9995	0	20
50	6940		6945		3055	9995		10
		248		249			1	
3° 00′	8,7188	235	8,7194	235	1,2806	9,9994	1	87° 00′
10	7423	222	7429	223	2571	9993	0	50
20	7645	212	7652	213	2348	9993	1	40
3° 30′	8,7857	202	8,7865	202	1,2135	9,9992	1	86° 30′
40	8059	192	8067	194	1933	9991	1	20
50	8251		8261		1739	9990		10
		185		185			1	
4° 00′	8,8436	177	8,8446	178	1,1554	9,9989	0	86° 00′
10	8613	170	8624	171	1376	9989	1	50
20	8783	163	8795	165	1205	9988	1	40
4° 30′	8,8946	158	8,8960	158	1,1040	9,9987	1	85° 30′
40	9104	152	9118	154	0882	9986	1	20
50	9256		9272		0728	9985		10
		147		148			2	
5° 00′	8,9403	142	8,9420	143	1,0580	9,9983	1	85° 00′
10	9545	137	9563	138	0437	9982	1	50
20	9682	134	9701	135	0299	9981	1	40
5° 30′	8,9816	129	8,9836	130	1,0164	9,9980	1	84° 30′
40	9945	125	9966	127	0034	9979	2	20
50	9,0070	122	9,0093	123	0,9907	9977	1	10
6° 00′	9,0192		9,0216		0,9784	9,9976		84° 00′

α	cos	*d*	ctg	*d. c.*	tg	sin	*d*	α

α	sin	*d*	tg	*d. c.*	ctg	cos	*d*	α
6° 00′	9,0192	119	9,0216	120	0,9784	9,9976	1	84° 00′
10	0311	115	0336	117	9664	9975	2	50
20	0426	113	0453	114	9547	9973	1	40
6° 30′	9,0539	109	9,0567	111	0,9433	9,9972	1	83° 30′
40	0648	107	0678	108	9322	9971	2	20
50	0755	104	0786	105	9214	9969	1	10
7° 00′	9,0859	102	9,0891	104	0,9109	9,9968	2	83° 00′
10	0961	99	0995	101	9005	9966	2	50
20	1060	97	1096	98	8904	9964	1	40
7° 30′	9,1157	95	9,1194	97	0,8806	9,9963	2	82° 30′
40	1252	93	1291	94	8709	9961	2	20
50	1345	91	1385	93	8615	9959	1	10
8° 00′	9,1436		9,1478		0,8522	9,9958		82° 00′
α	cos	*d*	ctg	*d. c.*	tg	sin	*d*	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
91	9,1	18,2	27,3	36,4	45,5	54,6	63,7	72,8	81,9
93	9,3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74,4	83,7
94	9,4	18,8	28,2	37,6	47,0	56,4	65,8	75,2	84,6
95	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	85,5
97	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5	58,2	67,9	77,6	87,3
98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8	68,6	78,4	88,2
99	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5	59,4	69,3	79,2	89,1
101	10,1	20,2	30,3	40,4	50,5	60,6	70,7	80,8	90,9
102	10,2	20,4	30,6	40,8	51,0	61,2	71,4	81,6	91,8
104	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0	62,4	72,8	83,2	93,6
105	10,5	21,0	31,5	42,0	52,5	63,0	73,5	84,0	94,5
107	10,7	21,4	32,1	42,8	53,5	64,2	74,9	85,6	96,3
108	10,8	21,6	32,4	43,2	54,0	64,8	75,6	86,4	97,2
109	10,9	21,8	32,7	43,6	54,5	65,4	76,3	87,2	98,1
111	11,1	22,2	33,3	44,4	55,5	66,6	77,7	88,8	99,9
113	11,3	22,6	33,9	45,2	56,5	67,8	79,1	90,4	101,7
114	11,4	22,8	34,2	45,6	57,0	68,4	79,8	91,2	102,6
115	11,5	23,0	34,5	46,0	57,5	69,0	80,5	92,0	103,5
117	11,7	23,4	35,1	46,8	58,5	70,2	81,9	93,6	105,3
119	11,9	23,8	35,7	47,6	59,5	71,4	83,3	95,2	107,1
120	12,0	24,0	36,0	48,0	60,0	72,0	84,0	96,0	108,0

α	sin	d	tg	d. c	ctg	cos	d	α
8° 00′	9,1436	89	9,1478	91	0,8522	9,9958	2	82° 00′
10	1525	87	1569	89	8431	9956	2	50
20	1612	85	1658	87	8342	9954	2	40
8° 30′	9,1697	84	9,1745	86	0,8255	9,9952	2	81° 30′
40	1781	82	1831	84	8169	9950	2	20
50	1863	80	1915	82	8085	9948	2	10
9° 00′	9,1943	79	9,1997	81	0,8003	9,9946	2	81° 00′
10	2022	78	2078	80	7922	9944	2	50
20	2100	76	2158	78	7842	9942	2	40
9° 30′	9,2176	75	9,2236	77	0,7764	9,9940	2	80° 30′
40	2251	73	2313	76	7687	9938	2	20
50	2324	73	2389	74	7611	9936	2	10
10° 00′	9,2397	71	9,2463	73	0,7537	9,9934	3	80° 00′
10	2468	70	2536	73	7464	9931	2	50
20	2538	68	2609	71	7391	9929	2	40
10° 30′	9,2606	68	9,2680	70	0,7320	9,9927	3	79° 30′
40	2674	66	2750	69	7250	9924	2	20
50	2740	66	2819	68	7181	9922	3	10
11° 00′	9,2806	64	9,2887	66	0,7113	9,9919	2	79° 00′
10	2870	64	2953	67	7047	9917	3	50
20	2934	63	3020	65	6980	9914	2	40
11° 30′	9,2997	61	9,3085	64	0,6915	9,9912	3	78° 30′
40	3058	61	3149	63	6851	9909	2	20
50	3119	60	3212	63	6788	9907	3	10
12° 00′	9,3179		9,3275		0,6725	9,9904		78° 00′
α	cos	d	ctg	d. c.	tg	sin	d	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
63	6,3	12,6	18,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
64	6,4	12,8	19,2	25,6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
65	6,5	13,0	19,5	26,0	32,5	39,0	45,5	52,0	58,5

α	sin	d	tg	d. c.	ctg	cos	d	α
12° 00′	9,3179	59	9,3275	61	0,6725	9,9904	3	78° 00′
10	3238	58	3336	61	6664	9901	2	50
20	3296	57	3397	61	6603	9899	3	40
12° 30′	9,3353	57	9,3458	59	0,6542	9,9896	3	78° 30′
40	3410	56	3517	59	6483	9893	3	20
50	3466	55	3576	58	6424	9890	3	10
13° 00′	9,3521	54	9,3634	57	0,6366	9,9887	3	77° 00′
10	3575	54	3691	57	6309	9884	3	50
20	3629	53	3748	56	6252	9881	3	40
13° 30′	9,3682	52	9,3804	55	0,6196	9,9878	3	76° 30′
40	3734	52	3859	55	6141	9875	3	20
50	3786	51	3914	54	6086	9872	3	10
14° 00′	9,3837	50	9,3968	53	0,6032	9,9869	3	76° 00′
10	3887	50	4021	53	5979	9866	3	50
20	3937	49	4074	53	5926	9863	4	40
14° 30′	9,3986	49	9,4127	51	0,5873	9,9859	3	75° 30′
40	4035	48	4178	52	5822	9856	3	20
50	4083	47	4230	51	5770	9853	4	10
15° 00′	9,4130	47	9,4281	50	0,5719	9,9849	3	75° 00′
10	4177	46	4331	50	5669	9846	3	50
20	4223	46	4381	49	5619	9843	4	40
15° 30′	9,4269	45	9,4430	49	0,5570	9,9839	3	74° 30′
40	4314	45	4479	48	5521	9836	4	20
50	4359	44	4527	48	5473	9832	4	10
16° 00′	9,4403		9,4575		0,5425	9,9828		74° 00′
α	cos	d	ctg	d. c.	tg	sin	d	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
63	6,3	12,6	18,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
64	6,4	12,8	19,2	25,6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
65	6,5	13,0	19,5	26,0	32,5	39,0	45,5	52,0	58,5

α	sin	*d*	tg	*d.c.*	ctg	cos	*d*	α
16°00′	9,4403	44	9,457$\bar{5}$	47	0,5425	9,9828	3	74°00′
10	4447	44	4622	47	5378	982$\bar{5}$	4	50
20	4491	42	4669	47	5331	9821	4	40
16°30′	9,4533	43	9,4716	46	0,5284	9,9817	3	73°30′
40	4576	42	4762	46	5238	9814	4	20
50	4618	41	4808	45	5192	9810	4	10
17°00′	9,4659	41	9,4853	45	0,5147	9,9806	4	73°00′
10	4700	41	4898	45	5102	9802	4	50
20	4741	40	4943	44	5057	9798	4	40
17′30′	9,4781	40	9,4987	44	0,5013	9,9794	4	72°30′
40	4821	40	5031	44	4969	9790	4	20
50	4861	39	507$\bar{5}$	43	4925	9786	4	10
18°00′	9,4900	39	9,5118	43	0,4882	9,9782	4	72°00′
10	4939	38	5161	42	4839	9778	4	50
20	4977	38	5203	42	4797	9774	4	40
18°30′	9,501$\bar{5}$	37	9,5245	42	0,475$\bar{5}$	9,9770	5	71°30′
40	5052	38	5287	42	4713	9765	4	20
50	5090	36	5329	41	4671	9761	4	10
19°00′	9,5126	37	9,5370	41	0,4630	9,9757	5	71°00′
10	5163	36	5411	40	4589	9752	4	50
20	5199	36	5451	40	4549	9748	5	40
19°30′	9,523$\bar{5}$	35	9,5491	40	0,4509	9,9743	4	70°30′
40	5270	36	5531	40	4469	9739	5	20
50	5306	35	5571	40	4429	9734	4	10
20°00′	9,5341		9,5611		0,4389	9,9730		70°00′
α	cos	*d*	ctg	*d.c.*	tg	sin	*d*	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
41	4,1	8,2	12,3	16,4	20,5	24,6	28,7	32,8	36,9

α	sin	*d*	tg	*d.c.*	ctg	cos	*d*	α
20°00′	9,5341	34	9,5611	39	0,4389	9,9730	5	70°00′
10	5375	34	5650	39	4350	9725	4	50
20	5409	34	5689	38	4311	9721	5	40
20°30′	9,5443	34	9,5727	39	0,4273	9,9716	5	69°30′
40	5477	33	5766	38	4234	9711	5	20
50	5510	33	5804	38	4196	9706	4	10
21°00′	9,5543	33	9,5842	37	0,4158	9,9702	5	69°00′
10	5576	33	5879	38	4121	9697	5	50
20	5609	32	5917	37	4083	9692	5	40
21°30′	9,5641	32	9,5954	37	0,4046	9,9687	5	68°30′
40	5673	31	5991	37	4009	9682	5	20
50	5704	32	6028	36	3972	9677	5	10
22°00′	9,5736	31	9,6064	36	0,3936	9,9672	5	68°00′
10	5767	31	6100	36	3900	9667	6	50
20	5798	30	6136	36	3864	9661	5	40
22°30′	9,5828	31	9,6172	36	0,3828	9,9656	5	67°30′
40	5859	30	6208	35	3792	9651	5	20
50	5889	30	6243	36	3757	9646	6	10
23°00′	9,5919	29	9,6279	35	0,3721	9,9640	5	67°00′
10	5948	30	6314	34	3686	9635	6	50
20	5978	29	6343	35	3652	9629	5	40
23°30′	9,6007	29	9,6383	34	0,3617	9,9624	6	66°30′
40	6036	29	6417	35	3583	9618	5	20
50	6065	28	6452	34	3548	9613	6	10
24°00′	9,6093	28	9,6486	34	0,3514	9,9607	5	66°00′
10	6121	28	6520	33	3480	9602	6	50
20	6149	28	6553	34	3447	9596	6	40
24°30′	9,6177	28	9,6587	33	0,3413	9,9590	6	65°30′
40	6205	27	6620	34	3380	9584	5	20
50	6232	27	6654	33	3346	9579	6	10
25°00′	9,6259		9,6687		0,3313	9,9573		65°00′
α	cos	*d*	ctg	*d.c.*	tg	sin	*d*	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3

α	sin	d	tg	d.c.	ctg	cos	d	α
25° 00′	9,6259	27	9,6687	33	0,3313	9,9573	6	65° 00′
10	6286	27	6720	32	3280	9567	6	50
20	6313	27	6752	33	3248	9561	6	40
25° 30′	9,6340	26	9,6785	32	0,3215	9,9555	6	64° 30′
40	6366	26	6817	33	3183	9549	6	20
50	6392	26	6850	32	3150	9543	6	10
26° 00′	9,6418	26	9,6882	32	0,3118	9,9537	7	64° 00′
10	6444	26	6914	32	3086	9530	6	50
20	6470	25	6946	31	3054	9524	6	40
26° 30′	9,6495	26	9,6977	32	0,3023	9,9518	6	63° 30′
40	6521	25	7009	31	2991	9512	7	20
50	6546	24	7040	32	2960	9505	6	10
27° 00′	9,6570	25	9,7072	31	0,2928	9,9499	7	63° 00′
10	6595	25	7103	31	2897	9492	6	50
20	6620	24	7134	31	2866	9486	7	40
27° 30′	9,6644	24	9,7165	31	0,2835	9,9479	6	62° 30′
40	6668	24	7196	30	2804	9473	7	20
50	6692	24	7226	31	2774	9466	7	10
28° 00′	9,6716	24	9,7257	30	0,2743	9,9459	6	62° 00′
10	6740	23	7287	30	2713	9453	7	50
20	6763	24	7317	31	2683	9446	7	40
28° 30′	9,6787	23	9,7348	30	0,2652	9,9439	7	61° 30′
40	6810	23	7378	30	2622	9432	7	20
50	6833	23	7408	30	2592	9425	7	10
29° 00′	9,6856	22	9,7438	29	0,2562	9,9418	7	61° 00′
10	6878	23	7467	30	2533	9411	7	50
20	6901	22	7497	29	2503	9404	7	40
29° 30′	9,6923	23	9,7526	30	0,2474	9,9397	7	60° 30′
40	6946	22	7556	29	2444	9390	7	20
50	6968	22	7585	29	2415	9383	8	10
30° 00′	9,6990		9,7614		0,2386	9,9375		60° 00′
α	cos	d	tg	d.c.	ctg	sin	d	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6
25	2,5	5.0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5

α	sin	d	tg	d.c.	ctg	cos	d	α
30° 00′	9,6990	22	9,7614	30	0,2386	9,9375	7	60° 00′
10	7012	21	7644	29	2356	9368	7	50
20	7033	22	7673	28	2327	9361	8	40
30° 30′	9,7055	21	9,7701	29	0,2299	9,9353	7	59° 30′
40	7076	21	7730	29	2270	9346	8	20
50	7097	21	7759	29	2241	9338	7	10
31° 00′	9,7118	21	9,7788	28	0,2212	9,9331	8	59° 00′
10	7139	21	7816	29	2184	9323	8	50
20	7160	21	7845	28	2155	9315	7	40
31° 30′	9,7181	20	9,7873	29	0,2127	9,9308	8	58° 30′
40	7201	21	7902	28	2098	9300	8	20
50	7222	20	7930	28	2070	9292	8	10
32° 00′	9,7242	20	9,7958	28	0,2042	9,9284	8	58° 00′
10	7262	20	7986	28	2014	9276	8	50
20	7282	20	8014	28	1986	9268	8	40
32° 30′	9,7302	20	9,8042	28	0,1958	9,9260	8	57° 30′
40	7322	20	8070	27	1930	9252	8	20
50	7342	19	8097	28	1903	9244	8	10
33° 00′	9,7361	19	9,8125	28	0,1875	9,9236	8	57° 00′
10	7380	20	8153	27	1847	9228	8	50
20	7400	19	8180	28	1820	9219	9	40
33° 30′	9,7419	19	9,8208	27	0,1792	9,9211	8	56° 30′
40	7438	19	8235	28	1765	9203	8	20
50	7457	19	8263	27	1737	9194	9	10
34° 00′	9,7476	18	9,8290	27	0,1710	9,9186	8	56° 00′
10	7494	19	8317	27	1683	9177	9	50
20	7513	18	8344	27	1656	9169	8	40
34° 30′	9,7531	19	9,8371	27	0,1629	9,9160	9	55° 30′
40	7550	18	8398	27	1602	9151	9	20
50	7568	18	8425	27	1575	9142	9	10
35° 00′	9,7586		9,8452		0,1548	9,9134	8	55° 00′
α	cos	d	ctg	d.c.	tg	sin	d	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7

α	sin	d	tg	d. c.	ctg	cos	d	α
35° 00′	9,7586	18	9,8452	27	0,1548	9,9134	9	55° 00′
10	7604	18	8479	27	1521	9125	9	50
20	7622	18	8506	27	1494	9116	9	40
35° 30′	9,7640	17	9,8533	26	0,1467	9,9107	9	54° 30′
40	7657	18	8559	27	1441	9098	9	20
50	7675	17	8586	27	1414	9089	9	10
36° 00′	9,7692	18	9,8613	26	0,1387	9,9080	10	54° 00′
10	7710	17	8639	27	1361	9070	9	50
20	7727	17	8666	26	1334	9061	9	40
36° 30′	9,7744	17	9,8692	26	0,1308	9,9052	10	53° 30′
40	7761	17	8718	27	1282	9042	9	20
50	7778	17	8745	26	1255	9033	10	10
37° 00′	9,7795	16	9,8771	26	0,1229	9,9023	9	53° 00′
10	7811	17	8797	27	1203	9014	10	50
20	7828	16	8824	26	1176	9004	9	40
37° 30′	9,7844	17	9,8850	26	0,1150	9,8995	10	52° 30′
40	7861	16	8876	26	1124	8985	10	20
50	7877	16	8902	26	1098	8975	10	10
38° 00′	9,7893	17	9,8928	26	0,1072	9,8965	10	52° 00′
10	7910	16	8954	26	1046	8955	10	50
20	7926	15	8980	26	1020	8945	10	40
38° 30′	9,7941	16	9,9006	26	0,0994	9,8935	10	51° 30′
40	7957	16	9032	26	0968	8925	10	20
50	7973	16	9058	26	0942	8915	10	10
39° 00′	9,7989	15	9,9084	26	0,0916	9,8905	10	51° 00′
10	8004	16	9110	25	0890	8895	11	50
20	8020	15	9135	26	0865	8884	10	40
39° 30′	9,8035	15	9,9161	26	0,0839	9,8874	10	50° 30′
40	8050	16	9187	25	0813	8864	11	20
50	8066	15	9212	26	0788	8853	10	10
40° 00′	9,8081		9,9238		0,0762	9,8843		50° 00′
α	cos	d	ctg	d. c.	tg	sin	d	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
11	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5

α	sin	d	tg	d. c.	ctg	cos	d	α
40° 00′	9,8081	15	9,9238	26	0,0762	9,8843	11	50° 00′
10	8096	15	9264	25	0736	8832	11	50
20	8111	14	9289	26	0711	8821	11	40
40° 30′	9,8125	15	9,9315	26	0,0685	9,8810	10	49° 30′
40	8140	15	9341	25	0659	8800	11	20
50	8155	14	9366	26	0634	8789	11	10
41° 00′	9,8169	15	9,9392	25	0,0608	9,8778	11	49° 00′
10	8184	14	9417	26	0583	8767	11	50
20	8198	15	9443	25	0557	8756	11	40
41° 30′	9,8213	14	9,9468	26	0,0532	9,8745	12	48° 30′
40	8227	14	9494	25	0506	8733	11	20
50	8241	14	9519	25	0481	8722	11	10
42° 00′	9,8255	14	9,9544	26	0,0456	9,8711	12	48° 00′
10	8269	14	9570	25	0430	8699	11	50
20	8283	14	9595	26	0405	8688	12	40
42° 30′	9,8297	14	9,9621	25	0,0379	9,8676	11	47° 30′
40	8311	13	9646	25	0354	8665	12	20
50	8324	14	9671	26	0329	8653	12	10
43° 00′	9,8338	13	9,9697	25	0,0303	9,8641	12	47° 00′
10	8351	14	9722	25	0278	8629	11	50
20	8365	13	9747	25	0253	8618	12	40
43° 30′	9,8378	13	9,9772	26	0,0228	9,8606	12	46° 30′
40	8391	14	9798	25	0202	8594	12	20
50	8405	13	9823	25	0177	8582	13	10
44° 00′	9,8418	13	9,9848	26	0,0152	9,8569	12	46° 00′
10	8431	13	9874	25	0126	8557	12	50
20	8444	13	9899	25	0101	8545	13	40
44° 30′	9,8457	12	9,9924	25	0,0076	9,8532	12	45° 30′
40	8469	13	9949	26	0051	8520	13	20
50	8482	13	9975	25	0025	8507	12	10
45° 00′	9,8495		0,0000		0,0000	9,8495		45° 00′
α	cos	d	ctg	d. c.	tg	sin	d	α

Δ	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3

Таблица 18

Десятичные логарифмы тригонометрических функций для углов в радианной мере

Логарифмы синусов

ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	—	8,0000	3010	4771	6019	6988	7779	8447	9026	9537	0,0
0,1	8,9993	·0405	·0781	·1127	·1447	·1745	·2023	·2284	·2529	·2761	0,1
0,2	9,2981	3190	3389	3579	3760	3934	4101	4261	4415	4563	0,2
0,3	9,4706	4844	4977	5106	5231	5352	5469	5582	5693	5800	0,3
0,4	9,5904	6005	6104	6200	6293	6385	6473	6560	6644	6727	0,4
0,5	9,6807	6886	6963	7037	7111	7182	7252	7321	7388	7454	0,5
0,6	9,7518	7581	7642	7702	7761	7819	7875	7931	7985	8038	0,6
0,7	9,8090	8141	8191	8240	8288	8336	8382	8427	8471	8515	0,7
0,8	9,8557	8599	8640	8680	8719	8758	8796	8833	8869	8905	0,8
0,9	9,8939	8974	9007	9040	9072	9103	9134	9164	9193	9222	0,9
1,0	9,9250	9278	9305	9331	9357	9382	9407	9431	9454	9477	1,0
1,1	9,9500	9522	9543	9564	9584	9604	9623	9641	9660	9677	1,1
1,2	9,9694	9711	9727	9743	9758	9773	9787	9800	9814	9826	1,2
1,3	9,9839	9851	9862	9873	9883	9893	9903	9912	9920	9929	1,3
1,4	9,9936	9944	9950	9957	9963	9968	9973	9978	9982	9986	1,4
1,5	9,9989	9992	9994	9996	9998	9999	0,0000	0,0000	—	—	1,5
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°

Логарифмы синусов

Примеры: 1. $\lg \sin 1{,}24 = 9{,}9758 = \overline{1},9758 = -0{,}0242$,

2. $\lg \sin 0{,}19 = 9{,}2761 = \overline{1},2761 = -0{,}7239$.

Продолжение табл. 18

Логарифмы косинусов

ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	0,0000	0000	·9999	·9998	·9997	·9995	·9992	·9989	·9986	·9982	0,0
0,1	9,9978	9974	9969	9963	9957	9951	9944	9937	9929	9921	0,1
0,2	9,9913	9904	9894	9884	9874	9863	9852	9840	9827	9815	0,2
0,3	9,9802	9788	9774	9759	9744	9728	9712	9696	9679	9661	0,3
0,4	9,9643	9624	9605	9585	9565	9545	9523	9502	9479	9456	0,4
0,5	9,9433	9409	9384	9359	9333	9307	9280	9253	9224	9196	0,5
0,6	9,9166	9136	9106	9074	9042	9010	8976	8942	8907	8872	0,6
0,7	9,8836	8799	8761	8723	8683	8643	8602	8561	8518	8475	0,7
0,8	9,8430	8385	8339	8292	8244	8195	8145	8094	8042	7989	0,8
0,9	9,7935	7880	7823	7766	7707	7647	7585	7523	7459	7393	0,9
1,0	9,7326	7258	7188	7117	7043	6969	6892	6814	6733	6651	1,0
1,1	9,6567	6480	6392	6301	6208	6112	6013	5912	5808	5701	1,1
1,2	9,5591	5478	5361	5241	5116	4988	4855	4717	4575	4427	1,2
1,3	9,4273	4114	3948	3774	3594	3405	3206	2998	2779	2548	1,3
1,4	9,2304	2044	1767	1472	1154	0810	0436	0027	·9575	·9069	1,4
1,5	8,8496	7836	7056	6105	4884	3180	0333	6,9012	—	—	1,5
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°

Логарифмы косинусов

Логарифмы тангенсов											
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	—	8,0000	3011	4773	6023	6993	7787	8458	9040	9554	0,0
0,1	9,0015	0431	0813	1164	1490	1794	2078	2347	2600	2840	0,1
0,2	9,3069	3287	3495	3695	3887	4071	4249	4421	4587	4748	0,2
0,3	9,4904	5056	5203	5347	5487	5623	5757	5887	6014	6139	0,3
0,4	9,6261	6381	6499	6615	6728	6840	6950	7058	7165	7270	0,4
0,5	9,7374	7477	7578	7678	7777	7875	7972	8068	8164	8258	0,5
0,6	9,8351	8444	8536	8628	8719	8809	8899	8989	9078	9166	0,6
0,7	9,9255	9343	9430	9518	9605	9692	9779	9866	9953	·0040	0,7
0,8	0,0127	0214	0301	0388	0475	0563	0650	0738	0827	0915	0,8
0,9	0,1004	1094	1184	1274	1365	1456	1548	1641	1735	1829	0,9
1,0	0,1924	2020	2117	2215	2314	2414	2515	2617	2721	2826	1,0
1,1	0,2933	3041	3151	3263	3376	3492	3609	3729	3851	3976	1,1
1,2	0,4103	4233	4366	4502	4642	4785	4932	5083	5239	5400	1,2
1,3	0,5566	5737	5914	6098	6290	6489	6696	6914	7141	7380	1,3
1,4	0,7633	7900	8183	8485	8809	9158	9537	9951	·0407	·0917	1,4
1,5	1,1493	2156	2938	3891	5114	6820	9667	3,0989	—	—	1,5
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
Логарифмы тангенсов											

Продолжение табл. 18

Логарифмы котангенсов

ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	—	2,0000	1,6989	5227	3977	3007	2213	1542	0960	0446	0,0
0,1	0,9985	9569	9187	8836	8510	8206	7922	7653	7400	7160	0,1
0,2	0,6931	6713	6505	6305	6113	5929	5751	5579	5413	5252	0,2
0,3	0,5096	4944	4797	4653	4513	4377	4243	4113	3986	3861	0,3
0,4	0,3739	3619	3501	3385	3272	3160	3050	2942	2835	2730	0,4
0,5	0,2626	2523	2422	2322	2223	2125	2028	1932	1836	1742	0,5
0,6	0,1649	1556	1464	1372	1281	1191	1101	1011	0922	0834	0,6
0,7	0,0745	0657	0570	0482	0395	0308	0221	0134	0047	·9960	0,7
0,8	9,9873	9786	9699	9612	9525	9437	9350	9262	9173	9085	0,8
0,9	9,8996	8906	8816	8726	8635	8544	8452	8359	8265	8171	0,9
1,0	9,8076	7980	7883	7785	7686	7586	7485	7383	7279	7174	1,0
1,1	9,7067	6959	6849	6737	6624	6508	6391	6271	6149	6024	1,1
1,2	9,5897	5767	5634	5498	5358	5215	5068	4917	4761	4600	1,2
1,3	9,4434	4263	4086	3902	3710	3511	3304	3086	2859	2620	1,3
1,4	9,2367	2100	1817	1515	1191	0842	0463	0049	·9593	·9083	1,4
1,5	8,8507	7844	7062	6109	4886	3180	0333	6,9011	—	—	1,5

ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°

Логарифмы котангенсов

Таблица 19

Натуральные логарифмы чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
0	—	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972	0
1	2,3026	3979	4849	5649	6391	7081	7726	8332	8904	9444	1
2	9957	·0445	·0910	·1355	·1781	·2189	·2581	·2958	·3322	·3673	2
3	3,4012	4340	4657	4965	5264	5553	5835	6109	6376	6636	3
4	6889	7136	7377	7612	7842	8067	8286	8501	8712	8918	4
5	3,9120	9318	9512	9703	9890	·0073	·0254	·0431	·0604	·0775	5
6	4,0943	1109	1271	1431	1589	1744	1897	2047	2195	2341	6
7	2485	2627	2767	2905	3041	3175	3307	3438	3567	3694	7
8	3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886	8
9	4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	5850	5951	9
10	4,6052	6151	6250	6347	6444	6540	6634	6728	6821	6913	10
11	7005	7095	7185	7274	7362	7449	7536	7622	7707	7791	11
12	7875	7958	8040	8122	8203	8283	8363	8442	8520	8598	12
13	8675	8752	8828	8903	8978	9053	9127	9200	9273	9345	13
14	9416	9488	9558	9628	9698	9767	9836	9904	9972	·0039	14
15	5,0106	0173	0239	0304	0370	0434	0499	0562	0626	0689	15
16	0752	0814	0876	0938	0999	1059	1120	1180	1240	1299	16
17	1358	1417	1475	1533	1591	1648	1705	1761	1818	1874	17
18	1930	1985	2040	2095	2149	2204	2257	2311	2364	2417	18
19	2470	2523	2575	2627	2679	2730	2781	2832	2883	2933	19
20	5,2983	3033	3083	3132	3181	3230	3279	3327	3375	3423	20
21	3471	3519	3566	3613	3660	3706	3753	3799	3845	3891	21
22	3936	3982	4027	4072	4116	4161	4205	4250	4293	4337	22
23	4381	4424	4467	4510	4553	4596	4638	4681	4723	4765	23
24	4806	4848	4889	4931	4972	5013	5053	5094	5134	5175	24

Примеры: 1. $\ln 205 = 5{,}3230$; 2. $\ln 55 = 4{,}0073$.

Продолжение табл. 19

Натуральные логарифмы чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*n*
25	5,5215	5255	5294	5334	5373	5413	5452	5491	5530	5568	25
26	5607	5645	5683	5722	5759	5797	5835	5872	5910	5947	26
27	5984	6021	6058	6095	6131	6168	6204	6240	6276	6312	27
28	6348	6384	6419	6454	6490	6525	6560	6595	6630	6664	28
29	6699	6733	6768	6802	6836	6870	6904	6937	6971	7004	29
30	5,7038	7071	7104	7137	7170	7203	7236	7268	7301	7333	30
31	7366	7398	7430	7462	7494	7526	7557	7589	7621	7652	31
32	7683	7714	7746	7777	7807	7838	7869	7900	7930	7961	32
33	7991	8021	8051	8081	8111	8141	8171	8201	8230	8260	33
34	8289	8319	8348	8377	8406	8435	8464	8493	8522	8551	34
35	5,8579	8608	8636	8665	8693	8721	8749	8777	8805	8833	35
36	8861	8889	8916	8944	8972	8999	9026	9054	9081	9108	36
37	9135	9162	9189	9216	9243	9269	9296	9322	9349	9375	37
38	9402	9428	9454	9480	9506	9532	9558	9584	9610	9636	38
39	9661	9687	9713	9738	9764	9789	9814	9839	9865	9890	39
40	5,9915	9940	9965	9989	·0014	·0039	·0064	·0088	·0113	·0137	40
41	6,0162	0186	0210	0234	0259	0283	0307	0331	0355	0379	41
42	0403	0426	0450	0474	0497	0521	0544	0568	0591	0615	42
43	0638	0661	0684	0707	0730	0753	0776	0799	0822	0845	43
44	0868	0890	0913	0936	0958	0981	1003	1026	1048	1070	44
45	6,1092	1115	1137	1159	1181	1203	1225	1247	1269	1291	45
46	1312	1334	1356	1377	1399	1420	1442	1463	1485	1506	46
47	1527	1549	1570	1591	1612	1633	1654	1675	1696	1717	47
48	1738	1759	1779	1800	1821	1841	1862	1883	1903	1924	48
49	1944	1964	1985	2005	2025	2046	2066	2086	2106	2126	49

Натуральные логарифмы чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*n*
50	6,2146	2166	2186	2206	2226	2246	2265	2285	2305	2324	50
51	2344	2364	2383	2403	2422	2442	2461	2480	2500	2519	51
52	2538	2558	2577	2596	2615	2634	2653	2672	2691	2710	52
53	2729	2748	2766	2785	2804	2823	2841	2860	2879	2897	53
54	2916	2934	2953	2971	2989	3008	3026	3044	3063	3081	54
55	6,3099	3117	3135	3154	3172	3190	3208	3226	3244	3261	55
56	3279	3297	3315	3333	3351	3368	3386	3404	3421	3439	56
57	3456	3474	3491	3509	3526	3544	3561	3578	3596	3613	57
58	3630	3648	3665	3682	3699	3716	3733	3750	3767	3784	58
59	3801	3818	3835	3852	3869	3886	3902	3919	3936	3953	59
60	6,3969	3986	4003	4019	4036	4052	4069	4085	4102	4118	60
61	4135	4151	4167	4184	4200	4216	4232	4249	4265	4281	61
62	4297	4313	4329	4345	4362	4378	4394	4409	4425	4441	62
63	4457	4473	4489	4505	4520	4536	4552	4568	4583	4599	63
64	4615	4630	4646	4661	4677	4693	4708	4723	4739	4754	64
65	6,4770	4785	4800	4816	4831	4846	4862	4877	4892	4907	65
66	4922	4938	4953	4968	4983	4998	5013	5028	5043	5058	66
67	5073	5088	5103	5117	5132	5147	5162	5177	5191	5206	67
68	5221	5236	5250	5265	5280	5294	5309	5323	5338	5352	68
69	5367	5381	5396	5410	5425	5439	5453	5468	5482	5497	69
70	6,5511	5525	5539	5554	5568	5582	5596	5610	5624	5639	70
71	5653	5667	5681	5695	5709	5723	5737	5751	5765	5779	71
72	5793	5806	5820	5834	5848	5862	5876	5889	5903	5917	72
73	5930	5944	5958	5971	5985	5999	6012	6026	6039	6053	73
74	6067	6080	6093	6107	6120	6134	6147	6161	6174	6187	74

Натуральные логарифмы чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*n*
75	6,6201	6214	6227	6241	6254	6267	6280	6294	6307	6320	75
76	6333	6346	6359	6373	6386	6399	6412	6425	6438	6451	76
77	6464	6477	6490	6503	6516	6529	6542	6554	6567	6580	77
78	6593	6606	6619	6631	6644	6657	6670	6682	6695	6708	78
79	6720	6733	6746	6758	6771	6783	6796	6809	6821	6834	79
80	6,6846	6859	6871	6884	6896	6908	6921	6933	6946	6958	80
81	6970	6983	6995	7007	7020	7032	7044	7056	7069	7081	81
82	7093	7105	7117	7130	7142	7154	7166	7178	7190	7202	82
83	7214	7226	7238	7250	7262	7274	7286	7298	7310	7322	83
84	7334	7346	7358	7370	7382	7393	7405	7417	7429	7441	84
85	6,7452	7464	7476	7488	7499	7511	7523	7534	7546	7558	85
86	7569	7581	7593	7604	7616	7627	7639	7650	7662	7673	86
87	7685	7696	7708	7719	7731	7742	7754	7765	7776	7788	87
88	7799	7811	7822	7833	7845	7856	7867	7878	7890	7901	88
89	7912	7923	7935	7946	7957	7968	7979	7991	8002	8013	89
90	6,8024	8035	8046	8057	8068	8079	8090	8101	8112	8123	90
91	8134	8145	8156	8167	8178	8189	8200	8211	8222	8233	91
92	8244	8255	8265	8276	8287	8298	8309	8320	8330	8341	92
93	8352	8363	8373	8384	8395	8405	8416	8427	8437	8448	93
94	8459	8469	8480	8491	8501	8512	8522	8533	8544	8554	94
95	6,8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8648	8659	95
96	8669	8680	8690	8701	8711	8721	8732	8742	8752	8763	96
97	8773	8783	8794	8804	8814	8824	8835	8845	8855	8865	97
98	8876	8886	8896	8906	8916	8926	8937	8947	8957	8967	98
99	8977	8987	8997	9007	9017	9027	9037	9048	9058	9068	99

Таблица 20

Значения величин для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно

Числа, кратные M=0,4343				Числа, кратные 1 : M=2,3026			
1	0,4343	26	11,2917	1	2,3026	26	59,8672
2	0,8686	27	11,7260	2	4,6052	27	62,1698
3	1,3029	28	12,1602	3	6,9078	28	64,4724
4	1,7372	29	12,5945	4	9,2103	29	66,7750
5	2,1715	30	13,0288	5	11,5129	30	69,0776
6	2,6058	31	13,4631	6	13,8155	31	71,3801
7	3,0401	32	13,8974	7	16,1181	32	73,6827
8	3,4744	33	14,3317	8	18,4207	33	75,9853
9	3,9086	34	14,7660	9	20,7233	34	78,2879
10	4,3429	35	15,2003	10	23,0259	35	80,5905
11	4,7772	36	15,6346	11	25,3284	36	82,8931
12	5,2115	37	16,0689	12	27,6310	37	85,1956
13	5,6458	38	16,5032	13	29,9336	38	87,4982
14	6,0801	39	16,9375	14	32,2362	39	89,8008
15	6,5144	40	17,3718	15	34,5388	40	92,1034
16	6,9487	41	17,8061	16	36,8414	41	94,4060
17	7,3830	42	18,2404	17	39,1439	42	96,7086
18	7,8173	43	18,6747	18	41,4465	43	99,0112
19	8,2516	44	19,1090	19	43,7491	44	101,3137
20	8,6859	45	19,5433	20	46,0517	45	103,6163
21	9,1202	46	19,9775	21	48,3543	46	105,9189
22	9,5545	47	20,4118	22	50,6569	47	108,2215
23	9,9888	48	20,8461	23	52,9595	48	110,5241
24	10,4231	49	21,2804	24	55,2620	49	112,8267
25	10,8574	50	21,7147	25	57,5646	50	115,1293

Основание десятичных логарифмов = 10

Основание натуральных логарифмов $e \approx 2{,}7183$

Натуральный логарифм числа 10 равен $1 : M = \ln 10 \approx 2{,}3026$

Десятичный логарифм числа e равен $M = \lg e \approx 0{,}4343$

$\ln A = 2{,}3026 \times \lg A$ (здесь A — любое число)

$\lg A = 0{,}4343 \times \ln A$

Таблица 21*

Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90°, через каждые 10′

ctg

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	′
0	∞	57,29	28,64	19,08	14,30	11,43	9,514	8,144	7,115	6,314	60
1	3437,7	56,35	28,40	18,98	14,24	39	488	12$\bar{5}$	100	302	59
2	1718,9	55,44	28,17	18,87	14,18	35	461	105	085	290	58
3	1145,9	54,56	27,94	18,77	14,12	11,32	9,435	8,086	7,071	6,278	57
4	859,4	53,71	27,71	18,67	14,07	28	409	067	056	267	56
5	687,5	52,88	27,49	18,56	14,01	24	383	048	041	25$\bar{5}$	55
6	573,0	52,08	27,27	18,46	13,95	11,20	9,357	8,028	7,026	6,243	54
7	491,1	51,30	27,06	18,37	13,89	17	332	009	012	232	53
8	429,7	50,5$\bar{5}$	26,84	18,27	13,84	13	306	7,991	6,997	220	52
9	382,0	49,82	26,64	18,17	13,78	11,10	9,281	7,972	6,983	6,209	51
10	343,8	49,10	26,43	18,07	13,73	06	255	953	968	197	50
11	312,5	48,41	26,23	17,98	13,67	02	230	934	954	186	49
12	286,$\bar{5}$	47,74	26,03	17,89	13,62	10,99	9,205	7,916	6,940	6,174	48
13	264,4	47,09	25,83	17,79	13,56	95	180	897	925	163	47
14	245,6	46,4$\bar{5}$	25,64	17,70	13,51	92	156	879	911	152	46
15	229,2	45,83	25,45	17,61	13,46	10,88	9,131	7,861	6,897	6,140	45
16	214,9	45,23	25,26	17,52	13,40	8$\bar{5}$	106	842	883	129	44
17	202,2	44,64	25,08	17,43	13,35	81	082	824	869	118	43
18	191,0	44,07	24,90	17,34	13,30	10,78	9,058	7,806	6,85$\bar{5}$	6,107	42
19	180,9	43,51	24,72	17,26	13,25	7$\bar{5}$	034	788	841	096	41
20	171,9	42,96	24,54	17,17	13,20	71	010	770	827	084	40
21	163,7	42,43	24,37	17,08	13,1$\bar{5}$	10,68	8,986	7,753	6,813	6,073	39
22	156,3	41,92	24,20	17,00	13,10	64	962	73$\bar{5}$	799	062	38
23	149,$\bar{5}$	41,41	24,03	16,92	13,0$\bar{5}$	61	939	717	786	051	37
24	143,2	40,92	23,86	16,83	13,00	10,58	8,915	7,700	6,772	6,041	36
25	137,5	40,44	23,69	16,7$\bar{5}$	12,9$\bar{5}$	$\bar{5}\bar{5}$	892	682	758	030	35
26	132,2	39,97	23,53	16,67	12,90	51	869	66$\bar{5}$	74$\bar{5}$	019	34
27	127,3	39,51	23,37	16,59	12,8$\bar{5}$	10,48	8,846	7,647	6,731	6,008	33
28	122,8	39,06	23,21	16,5[illegible]	12,80	4$\bar{5}$	823	630	718	5,997	32
29	118,5	38,62	23,06	16,43	12,75	42	800	613	704	986	31
30	114,6	38,19	22,90	16,3$\bar{5}$	12,71	10,39	8,777	7,596	6,691	5,976	30
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	83°	82°	81°	80°	′

tg

* Способ пользования таблицей см.: Л. С. Хренов. Пятизначные таблицы тригонометрических функций. Изд. 4. Физматгиз, 1962.

cosec

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	′
0	∞	57,30	28,65	19,11	14,34	11,47	9,567	8,206	7,185	6,392	60
1	3437,7	56,36	28,42	19,00	14,28	44	540	186	170	381	59
2	1718,9	55,45	28,18	18,90	14,22	40	514	167	156	369	58
3	1145,9	54,57	27,96	18,79	14,16	11,36	9,488	8,148	7,141	6,357	57
4	859,4	53,72	27,73	18,69	14,10	32	462	128	126	346	56
5	687,5	52,89	27,51	18,59	14,04	29	436	109	112	334	55
6	573,0	52,09	27,29	18,49	13,99	11,25	9,411	8,091	7,097	6,323	54
7	491,1	51,31	27,08	18,39	13,93	21	385	072	083	311	53
8	429,7	50,56	26,86	18,30	13,87	18	360	053	068	300	52
9	382,0	49,83	26,66	18,20	13,82	11,14	9,334	8,034	7,054	6,289	51
10	343,8	49,11	26,45	18,10	13,76	10	309	016	040	277	50
11	312,5	48,42	26,25	18,01	13,71	07	284	7,997	025	266	49
12	286,5	47,75	26,05	17,91	13,65	11,03	9,259	7,979	7,011	6,255	48
13	264,4	47,10	25,85	17,82	13,60	00	235	960	6,997	243	47
14	245,6	46,46	25,66	17,73	13,55	10,96	210	942	983	232	46
15	229,2	45,84	25,47	17,64	13,49	10,93	9,186	7,924	7,969	6,221	45
16	214,9	45,24	25,28	17,55	13,44	89	161	906	955	210	44
17	202,2	44,65	25,10	17,46	13,39	86	137	888	941	199	43
18	191,0	44,08	24,92	17,37	13,34	10,83	9,113	7,870	7,927	6,188	42
19	180,9	43,52	24,74	17,28	13,29	79	089	852	914	177	41
20	171,9	42,98	24,56	17,20	13,23	76	065	834	900	166	40
21	163,7	42,45	24,39	17,11	13,18	10,73	9,041	7,817	7,886	6,155	39
22	156,3	41,93	24,22	17,03	13,13	69	018	799	872	144	38
23	149,5	41,42	24,05	16,94	13,08	66	8,994	782	859	134	37
24	143,2	40,93	23,88	16,86	13,03	10,63	8,971	7,764	7,845	6,123	36
25	137,5	40,45	23,72	16,78	12,99	59	948	747	832	112	35
26	132,2	39,98	23,55	16,70	12,94	56	925	730	819	101	34
27	127,3	39,52	23,39	16,62	12,89	10,53	8,902	7,712	7,805	6,091	33
28	122,8	39,07	23,24	16,54	12,84	50	879	695	792	080	32
29	118,5	38,63	23,08	16,46	12,79	47	856	678	779	069	31
30	114,6	38,20	22,93	16,38	12,75	10,43	8,834	7,661	7,765	6,059	30
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	83°	82°	81°	80°	′

sec

ctg

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	′
30	114,59	38,19	22,90	16,35	12,71	10,385	8,777	7,596	6,691	5,976	30
31	110,89	37,77	22,75	16,27	12,66	354	754	579	678	965	29
32	107,43	37,36	22,60	16,20	12,61	322	732	562	665	954	28
33	104,17	36,96	22,45	16,12	12,57	10,291	8,709	7,545	6,651	5,944	27
34	101,11	36,56	22,31	16,04	12,52	260	687	528	638	933	26
35	98,22	36,18	22,16	15,97	12,47	229	665	511	625	923	25
36	95,49	35,80	22,02	15,89	12,43	10,199	8,643	7,495	6,612	5,912	24
37	92,91	35,43	21,88	15,82	12,38	168	621	478	599	902	23
38	90,46	35,07	21,74	15,75	12,34	138	599	462	586	892	22
39	88,14	34,72	21,61	15,68	12,29	10,108	8,577	7,445	6,573	5,881	21
40	85,94	34,37	21,47	15,60	12,25	078	556	429	561	871	20
41	83,84	34,03	21,34	15,53	12,21	048	534	412	548	861	19
42	81,85	33,69	21,20	15,46	12,16	10,019	8,513	7,396	6,535	5,850	18
43	79,94	33,37	21,07	15,39	12,12	9,989	491	380	522	840	17
44	78,13	33,05	20,95	15,33	12,08	960	470	364	510	830	16
45	76,39	32,73	20,82	15,26	12,03	9,931	8,449	7,348	6,497	5,820	15
46	74,73	32,42	20,69	15,19	11,99	902	428	332	485	810	14
47	73,14	32,12	20,57	15,12	11,95	873	407	316	472	799	13
48	71,62	31,82	20,45	15,06	11,91	9,845	8,386	7,300	6,460	5,789	12
49	70,15	31,53	20,33	14,99	11,87	816	366	284	447	779	11
50	68,75	31,24	20,21	14,92	11,83	788	345	269	435	769	10
51	67,40	30,96	20,09	14,86	11,79	9,760	8,324	7,253	6,423	5,759	9
52	66,11	30,68	19,97	14,80	11,74	732	304	238	410	749	8
53	64,86	30,41	19,85	14,73	11,70	704	284	222	398	740	7
54	63,66	30,14	19,74	14,67	11,66	9,677	8,264	7,207	6,386	5,730	6
55	62,50	29,88	19,63	14,61	11,62	649	243	191	374	720	5
56	61,38	29,62	19,52	14,54	11,59	622	223	176	362	710	4
57	60,31	29,37	19,41	14,48	11,55	9,595	8,204	7,161	6,350	5,700	3
58	59,27	29,12	19,30	14,42	11,51	568	184	146	338	691	2
59	58,26	28,88	19,19	14,36	11,47	541	164	130	326	681	1
60	57,29	28,64	19,08	14,30	11,43	9,514	8,144	7,115	6,314	5,671	0
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	83°	82°	81°	80°	′

tg

cosec

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	′
30	114,59	38,20	22,93	16,38	12,75	10,433	8,834	7,661	6,765	6,059	30
31	110,90	37,78	22,77	16,30	12,70	402	811	644	752	048	29
32	107,43	37,37	22,62	16,23	12,65	371	789	628	739	038	28
33	104,18	36,97	22,48	16,15	12,61	10,340	8,767	7,611	6,726	6,027	27
34	101,11	36,58	22,33	16,07	12,56	309	744	594	713	017	26
35	98,22	36,19	22,19	16,00	12,51	278	722	578	700	007	25
36	95,49	35,81	22,04	15,93	12,47	10,248	8,700	7,561	6,687	5,996	24
37	92,91	35,45	21,90	15,85	12,42	217	679	545	675	986	23
38	90,47	35,08	21,77	15,78	12,38	187	657	528	662	976	22
39	88,15	34,73	21,63	15,71	12,34	10,157	8,635	7,512	6,649	5,966	21
40	85,95	34,38	21,49	15,64	12,29	128	614	496	636	955	20
41	83,85	34,04	21,36	15,57	12,25	098	592	480	624	945	19
42	81,85	33,71	21,23	15,50	12,20	10,068	8,571	7,463	6,611	5,935	18
43	79,95	33,38	21,10	15,43	12,16	039	550	447	599	925	17
44	78,13	33,06	20,97	15,36	12,12	010	529	431	586	915	16
45	76,40	32,75	20,84	15,29	12,08	9,981	8,508	7,416	6,574	5,905	15
46	74,74	32,44	20,72	15,22	12,03	952	487	400	561	895	14
47	73,15	32,13	20,59	15,16	11,99	924	466	384	549	885	13
48	71,62	31,81	20,47	15,09	11,95	9,895	8,446	7,368	6,537	5,875	12
49	70,16	31,54	20,35	15,02	11,91	867	425	353	524	865	11
50	68,76	31,26	20,23	14,96	11,87	839	405	337	512	855	10
51	67,41	30,98	20,11	14,89	11,83	9,811	8,384	7,322	6,500	5,846	9
52	66,11	30,70	20,00	14,83	11,79	783	364	306	488	836	8
53	64,87	30,43	19,88	14,77	11,75	756	344	291	476	826	7
54	63,66	30,16	19,77	14,70	11,71	9,728	8,324	7,276	6,464	5,816	6
55	62,51	29,90	19,65	14,64	11,67	701	304	260	452	807	5
56	61,39	29,64	19,54	14,58	11,63	674	284	245	440	797	4
57	60,31	29,39	19,43	14,52	11,59	9,647	8,264	7,230	6,428	5,787	3
58	59,27	29,14	19,32	14,46	11,55	620	245	215	416	778	2
59	58,27	29,89	19,21	14,40	11,51	593	225	200	404	768	1
60	57,30	28,65	19,11	14,34	11,47	9,567	8,206	7,185	6,392	5,759	0
′	89°	88°	87°	86°	85°	84°	83°	82°	81°	80°	′

sec

α	sin	α″ cosec α	tg	α″ ctg α	sec	cos	α
0° 00′	0,000000	206 265	0,000000	206 265	1,0000	1,0000	90° 00′
10	0,002909	265	0,002909	264	0000	0000	50
20	5818	266	0,005818	262	0000	0000	40
0° 30′	0,008727	206 267	0,008727	206 260	1,0000	1,0000	89° 30′
40	0,01164	269	0,01164	255	0001	0,9999	20
50	1454	272	0,01455	250	0001	9999	10
1° 00′	0,01745	206 275	0,01746	206 244	1,0002	0,9998	89° 00′
10	2036	279	2036	236	0002	9998	50
20	2327	283	2328	228	0003	9997	40
1° 30′	0,02618	206 288	0,02619	206 218	1,0003	0,9997	88° 30′
40	2908	294	2910	207	0004	9996	20
50	3199	300	3201	194	0005	9995	10
2° 00′	0,03490	206 307	0,03492	206 181	1,0006	0,9994	88° 00′
10	3781	314	3783	166	0007	9993	50
20	4071	322	4075	151	0008	9992	40
2° 30′	0,04362	206 330	0,04366	206 134	0,0010	0,9990	87° 30′
40	4653	339	4658	116	0011	9989	20
50	4943	349	4949	097	0012	9988	10
3° 00′	0,05234	206 359	0,05241	206 076	0,0014	0,9986	87° 00′
10	5524	370	5533	055	0015	9985	50
20	5814	381	5824	032	0017	9983	40
3° 30′	0,06105	206 393	0,06116	206 008	1,0019	0,9981	86° 30′
40	6395	406	6408	205 983	0021	9980	20
50	6685	419	6700	957	0022	9978	10
4° 00′	0,06976	206 432	0,06993	205 930	1,0024	0,9976	86° 00′
10	7266	447	7285	901	0027	9974	50
20	7556	462	7578	871	0029	9971	40
4° 30′	0,07846	206 477	0,07870	205 841	1,0031	0,9969	85° 30′
40	8136	493	8163	808	0033	9967	20
50	8426	510	8456	775	0036	9964	10
5° 00′	0,08716	206 527	0,08749	205 741	1,0038	0,9962	85° 00′
α	cos	$\alpha'' \sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	ctg	$\alpha'' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	cosec	sin	α

α	sin	α″ cosec α	tg	α″ ctg α	sec	cos	α
5° 00′	0,08716	206 527	0,08749	205 741	1,0038	0,9962	85° 00′
10	9005	54$\bar{5}$	9042	705	0041	9959	50
20	929$\bar{5}$	563	9335	669	0043	9957	40
5° 30′	0,0958$\bar{5}$	206 582	0,09629	205 631	1,0046	0,9954	84° 30′
40	9874	601	9923	592	0049	9951	20
50	0,1016	622	0,1022	552	0052	9948	10
6° 00′	0,1045	206 642	0,1051	205 510	1,0055	0,9945	84° 00′
10	1074	664	1080	468	0058	9942	50
20	1103	685	1110	424	0061	9939	40
6° 30′	0,1132	206 708	0,1139	205 379	1,0065	0,9936	83° 30′
40	1161	731	1169	333	0068	9932	20
50	1190	75$\bar{5}$	1198	286	0072	9929	10
7° 00′	0,1219	206 779	0,1228	205 238	1,0075	0,9925	83° 00′
10	1248	804	1257	188	0079	9922	50
20	1276	829	1287	137	0082	9918	40
7° 30′	0,1305	206 855	0,1317	205 085	1,0086	0,9914	82° 30′
40	1334	882	1346	032	0090	9911	20
50	1363	909	1376	204 978	0094	9907	10
8° 00′	0,1392	206 937	0,1405	204 923	1,0098	0,9903	82° 00′
10	1421	96$\bar{5}$	1435	866	0102	9899	50
20	1449	994	146$\bar{5}$	808	0107	9894	40
8° 30′	0,1478	207 023	0,149$\bar{5}$	204 749	1,0111	0,9890	81° 30′
40	1507	053	1524	689	0116	9886	20
50	1536	084	1554	628	0120	9881	10
9° 00′	0,1564	207 115	0,1584	204 566	1,012$\bar{5}$	0,9877	81° 00′
10	1593	147	1614	502	0129	9872	50
20	1622	180	1644	437	0134	9868	40
9° 30′	0,1650	207 213	0,1673	204 371	1,0139	0,9863	80° 30′
40	1679	247	1703	304	0144	9858	20
50	1708	281	1733	236	0149	9853	10
10° 00′	0,1736	207 316	0,1763	204 166	1,0154	0,9848	80° 00′
α	cos	$\alpha'' \sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	ctg	$\alpha'' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	cosec	sin	α

Продолжение табл. 21

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
10° 00′	0,1736	5,759	0,1763	5,671	1,0154	0,9848	80° 00′
10	1765	665	1793	576	0160	9843	50
20	1794	575	1823	485	0165	9838	40
10° 30′	0,1822	5,487	0,1853	5,396	1,0170	0,9833	79° 30′
40	1851	403	1883	309	0176	9827	20
50	1880	320	1914	226	0181	9822	10
11° 00′	0,1908	5,241	0,1944	5,145	1,0187	0,9816	79° 00′
10	1937	164	1974	066	0193	9811	50
20	1965	089	2004	4,989	0199	9805	40
11° 30′	0,1994	5,016	0,2035	4,915	1,0205	0,9799	78° 30′
40	2022	4,945	2065	843	0211	9793	20
50	2051	876	2095	773	0217	9787	10
12° 00′	0,2079	4,810	0,2126	4,705	1,0223	0,9781	78° 00′
10	2108	745	2156	638	0230	9775	50
20	2136	682	2186	574	0236	9769	40
12° 30′	0,2164	4,620	0,2217	4,511	1,0243	9763	77° 30′
40	2193	560	2247	449	0249	9757	20
50	2221	502	2278	390	0256	9750	10
13° 00	0,2250	4,445	0,2309	4,331	1,0263	0,9744	77° 00′
10	2278	390	2339	275	0270	9737	50
20	2306	336	2370	219	0277	9730	40
13° 30′	0,2334	4,284	0,2401	4,165	1,0284	0,9724	76° 30′
40	2363	232	2432	113	0291	9717	20
50	2391	182	2462	061	0299	9710	10
14° 00′	0,2419	4,134	0,2493	4,011	1,0306	0,9703	76° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8
64	6,4	12,8	19,2	25,6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
66	6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4
68	6,8	13,6	20,4	27,2	34,0	40,8	47,6	54,4	61,2
72	7,2	14,4	21,6	28,8	36,0	43,2	50,4	57,6	64,8
76	7,6	15,2	22,8	30,4	38,0	45,6	53,2	60,8	68,4
79	7,9	15,8	23,7	31,6	39,5	47,4	55,3	63,2	71,1
84	8,4	16,8	25,2	33,6	42,0	50,4	58,8	67,2	75,6
88	8,8	17,6	26,4	35,2	44,0	52,8	61,6	70,4	79,2

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
14° 00′	0,2419	4,134	0,2493	4,011	1,0306	0,9703	76° 00′
10	2447	086	2524	3,962	0314	9696	50
20	2476	039	2555	914	0321	9689	40
14° 30′	0,2504	3,994	0,2586	3,867	1,0329	0,9681	75° 30′
40	2532	950	2617	821	0337	9674	20
50	2560	906	2648	776	0345	9667	10
15° 00′	0,2588	3,864	0,2679	3,732	1,0353	0,9659	75° 00′
10	2616	822	2711	689	0361	9652	50
20	2644	782	2742	647	0369	9644	40
15° 30′	0,2672	3,742	0,2773	3,606	1,0377	0,9636	74° 30′
40	2700	703	2805	566	0386	9628	20
50	2728	665	2836	526	0394	9621	10
16° 00′	0,2756	3,628	0,2867	3,487	1,0403	0,9613	74° 00′
10	2784	592	2899	450	0412	9605	50
20	2812	556	2931	412	0421	9596	40
16° 30′	0,2840	3,521	0,2962	3,376	1,0429	0,9588	73° 30′
40	2868	487	2994	340	0439	9580	20
50	2896	453	3026	305	0448	9572	10
17° 00′	0,2924	3,420	0,3057	3,271	1,0457	0,9563	73° 00′
10	2952	388	3089	237	0466	9555	50
20	2979	356	3121	204	0476	9546	40
17° 30′	0,3007	3,326	0,3153	3,172	1,0485	0 9537	72° 30′
40	3035	295	3185	140	0495	9528	20
50	3062	265	3217	108	0505	9520	10
18° 00′	0,3090	3,236	0,3249	3,078	1,0515	0,9511	72° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
18° 00′	0,3090	3,236	0,3249	3,078	1,0515	0,9511	72° 00′
10	3118	207	3281	047	0525	9502	50
20	3145	179	3314	018	0535	9492	40
18° 30′	0,3173	3,152	0,3346	2,989	1,0545	0,9483	71° 30′
40	3201	124	3378	960	0555	9474	20
50	3228	098	3411	932	0566	9465	10
19° 00′	0,3256	3,072	0,3443	2,904	1,0576	0,9455	71° 00′
10	3283	046	3476	877	0587	9446	50
20	3311	021	3508	850	0598	9436	40
19° 30′	0,3338	2,996	0,3541	2,824	1,0608	0,9426	70° 30′
40	3365	971	3574	798	0619	9417	20
50	3393	947	3607	773	0631	9407	10
20° 00′	0,3420	2,924	0,3640	2,747	1,0642	0,9397	70° 00′
10	3448	901	3673	723	0653	9387	50
20	3475	878	3706	699	0665	9377	40
20° 30′	0,3502	2,855	0,3739	2,675	1,0676	0,9367	69° 30′
40	3529	833	3772	651	0688	9356	20
50	3557	812	3805	628	0700	9346	10
21° 00′	0,3584	2,790	0,3839	2,605	1,0711	0,9336	69° 00′
10	3611	769	3872	583	0723	9325	50
20	3638	749	3906	560	0736	9315	40
21° 30′	0,3665	2,729	0,3939	2,539	1,0748	0,9304	68° 30′
40	3692	709	3973	517	0760	9293	20
50	3719	689	4006	496	0773	9283	10
22° 00′	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,0785	0,9272	68° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6
25	2,5	5,0	7,5	10 0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13 2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
22° 00′	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,0785	0,9272	68° 00′
10	3773	650	4074	455	0798	9261	50
20	3800	632	4108	434	0811	9250	40
22° 30′	0,3827	2,613	0,4142	2,414	1,0824	0,9239	67° 30′
40	3854	595	4176	394	0837	9228	20
50	3881	577	4210	375	0850	9216	10
23° 00′	0,3907	2,559	0,4245	2,356	1,0864	0,9205	67° 00′
10	3934	542	4279	337	0877	9194	50
20	3961	525	4314	318	0891	9182	40
23° 30′	0,3987	2,508	0,4348	2,300	1,0904	0,9171	66° 30′
40	4014	491	4383	282	0918	9159	20
50	4041	475	4417	264	0932	9147	10
24° 00″	0,4067	2,459	0,4452	2,246	1,0946	0,9135	66° 00′
10	4094	443	4487	229	0961	9124	50
20	4120	427	4522	211	0975	9112	40
24° 30′	0,4147	2,411	0,4557	2,194	1,0989	0,9100	65° 30′
40	4173	396	4592	177	1004	9088	20
50	4200	381	4628	161	1019	9075	10
25° 00′	0,4226	2,366	0,4663	2,145	1,1034	0,9063	65° 00′
10	4253	352	4699	128	1049	9051	50
20	4279	337	4734	112	1064	9038	40
25° 30′	0,4305	2,323	0,4770	2,097	1,1079	0,9026	64° 30′
40	4331	309	4806	081	1095	9013	20
50	4358	295	4841	066	1110	9001	10
26° 00′	0,4384	2,281	0,4877	2,050	1,1126	0,8988	64° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
89	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1
94	9,4	18,8	28,2	37,6	47,0	56,4	65,8	75,2	84,6
95	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	85,5

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
26° 00′	0,4384	2,281	0,4877	2,0503	1,1126	0,8988	64° 00′
10	4410	268	4913	0353	1142	8975	50
20	4436	254	4950	0204	1158	8962	40
26° 30′	0,4462	2,241	0,4986	2,0057	1,1174	0,8949	63° 30′
40	4488	228	5022	1,9912	1190	8936	20
50	4514	215	5059	9768	1207	8923	10
27° 00′	0,4540	2,203	0,5095	1,9626	1,1223	0,8910	63° 00′
10	4566	190	5132	9486	1240	8897	50
20	4592	178	5169	9347	1257	8884	40
27° 30′	0,4617	2,166	0,5206	1,9210	1,1274	0,8870	62° 30′
40	4643	154	5243	9074	1291	8857	20
50	4669	142	5280	8940	1308	8843	10
28° 00′	0,4695	2,130	0,5317	1,8807	1,1326	0,8829	62° 00′
10	4720	118	5354	8676	1343	8816	50
20	4746	107	5392	8545	1361	8802	40
28° 30′	0,4772	2,096	0,5430	1,8418	1,1379	0,8788	61° 30′
40	4797	085	5467	8291	1397	8774	20
50	4823	074	5505	8165	1415	8760	10
29° 00′	0,4848	2,063	0,5543	1,8040	1,1434	0,8746	61° 00′
10	4874	052	5581	7917	1452	8732	50
20	4899	041	5619	7796	1471	8718	40
29° 30′	0,4924	2,031	0,5658	1,7675	1,1490	0,8704	60° 30′
40	4950	020	5696	7556	1509	8689	20
50	4975	010	5735	7437	1528	8675	10
30° 00′	0,5000	2,000	0,5774	1,7321	1,1547	0,8660	60° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
119	11,9	23,8	35,7	47,6	59,5	71,4	83,3	95,2	107,1
123	12,3	24,6	36,9	49,2	61,5	73,8	86,1	98,4	110,7
126	12,6	25,2	37,8	50,4	63,0	75,6	88,2	100,8	113,4
127	12,7	25,4	38,1	50,8	63,5	76,2	88,9	101,6	114,3
128	12,8	25,6	38,4	51,2	64,0	76,8	89,6	102,4	115,2
134	13,4	26,8	40,2	53,6	67,0	80,4	93,8	107,2	120,6
137	13,7	27,4	41,1	54,8	68,5	82,2	95,9	109,6	123,3
139	13,9	27,8	41,7	55,6	69,5	83,4	97,3	111,2	125,1
142	14,2	28,4	42,6	56,8	71,0	85,2	99,4	113,6	127,8
144	14,4	28,8	43,2	57,6	72,0	86,4	100,8	115,2	129,6
145	14,5	29,0	43,5	58,0	72,5	87,0	101,5	116,0	130,5
149	14,9	29,8	44,7	59,6	74,5	89,4	104,3	119,2	134,1

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
30° 00′	0,5000	2,0000	0,5774	1,7321	1,1547	0,8660	60° 00′
10	5025	1,9900	5812	7205	1566	8646	50
20	5050	9801	5851	7090	1586	8631	40
30° 30′	0,5075	1,9703	0,5890	1,6977	1,1606	0,8616	59° 30′
40	5100	9606	5930	6864	1626	8601	20
50	5125	9511	5969	6753	1646	8587	10
31° 00′	0,5150	1,9416	0,6009	1,6643	1,1666	0,8572	59° 00′
10	5175	9323	6048	6534	1687	8557	50
20	5200	9230	6088	6426	1707	8542	40
31° 30′	0,5225	1,9139	0,6128	1,6319	1,1728	0,8526	58° 30′
40	5250	9048	6168	6212	1749	8511	20
50	5275	8959	6208	6107	1770	8496	10
32° 00°	0,5299	1,8871	0,6249	1,6003	1,1792	0,8480	58° 00′
10	5324	8783	6289	5900	1813	8465	50
20	5348	8697	6330	5798	1835	8450	40
32° 30″	0,5373	1,8612	0,6371	1,5697	1,1857	0,8434	57° 30′
40	5398	8527	6412	5597	1879	8418	20
50	5422	8443	6453	5497	1901	8403	10
33° 00′	0,5446	1,8361	0,6494	1,5399	1,1924	0,8387	57° 00′
10	5471	8279	6536	5301	1946	8371	50
20	5495	8198	6577	5204	1969	8355	40
33° 30′	0,5519	1,8118	0,6619	1,5108	1,1992	0,8339	56° 30′
40	5544	8039	6661	5013	2015	8323	20
50	5568	7960	6703	4919	2039	8307	10
34° 00′	0,5592	1,7883	0,6745	1,4826	1,2062	0,8290	56° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
77	7,7	15,4	23,1	30,8	38,5	46,2	53,9	61,6	69.3
93	9 3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74.4	83,7
94	9,4	18,8	28,2	37,6	47,0	56,4	65,8	75,2	84,6
96	9,6	19,2	28,8	38,4	48,0	57,6	67,2	76,8	86,4
98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8	68,6	78,4	88,2
99	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5	59,4	69,3	79,2	89,1
103	10,3	20,6	30,9	41,2	51,5	61,8	72,1	82.4	92,7
104	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0	62,4	72,8	83,2	93,6
107	10,7	21,4	32,1	42,8	53,5	64,2	74,9	85,6	96,3
109	10,9	21,8	32,7	43,6	54,5	65,4	76,3	87,2	98,1
113	11,3	22,6	33,9	45,2	56,5	67,8	79,1	90,4	101,7
116	11,6	23,2	34,8	46,4	58,0	69,6	81,2	92,8	104,4

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
34° 00′	0,5592	1,7883	0,6745	1,4826	1,2062	0,8290	56° 00′
10	5616	7806	6787	4733	2086	8274	50
20	5640	7730	6830	4641	2110	8258	40
34° 30′	0,5664	1,7655	0,6873	1,4550	1,2134	0,8241	55° 30′
40	5688	7581	6916	4460	2158	8225	20
50	5712	7507	6959	4370	2183	8208	10
35° 00′	0,5736	1,7434	0,7002	1,4281	1,2208	0,8192	55° 00′
10	5760	7362	7046	4193	2233	8175	50
20	5783	7291	7089	4106	2258	8158	40
35° 30′	0,5807	1,7221	0,7133	1,4019	1,2283	0,8141	54° 30′
40	5831	7151	7177	3934	2309	8124	20
50	5854	7081	7221	3848	2335	8107	10
36° 00′	0,5878	1,7013	0,7265	1,3764	1,2361	0,8090	54° 00′
10	5901	6945	7310	3680	2387	8073	50
20	5925	6878	7355	3597	2413	8056	40
36° 30′	0,5948	1,6812	0,7400	1,3514	1,2440	0,8039	53° 30′
40	5972	6746	7445	3432	2467	8021	20
50	5995	6681	7490	3351	2494	8004	10
37° 00′	0,6018	1,6616	0,7536	1,3270	1,2521	0,7986	53° 00′
10	6041	6553	7581	3190	2549	7969	50
20	6065	6489	7627	3111	2577	7951	40
37° 30′	0,6088	1,6427	0,7673	1,3032	1,2605	0,7934	52° 30′
40	6111	6365	7720	2954	2633	7916	20
50	6134	6303	7766	2876	2661	7898	10
38° 00′	0,6157	1,6243	0,7813	1,2799	1,2690	0,7880	52° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	.5	6	7	8	9
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
63	6,3	12,6	18,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
64	6,4	12,8	19,2	25.6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
67	6,7	13,4	20,1	26,8	33,5	40,2	46,9	53.6	60,3
75	7,5	15,0	22,5	30,0	37,5	45,0	52,5	60,0	67,5
79	7,9	15,8	23,7	31,6	39,5	47,4	55,3	63,2	71,1
83	8,3	16,6	24,9	33,2	41,5	49,8	58,1	66,4	74,7
87	8,7	17,4	26,1	34,8	43,5	52,2	60,9	69,6	78,3
88	8,8	17,6	26,4	35,2	44,0	52,8	61,6	70,4	79,2
89	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
38° 00′	0,6157	1,6243	0,7813	1,2799	1,2690	0,7880	52° 00′
10	6180	6183	7860	2723	2719	7862	50
20	6202	6123	7907	2647	2748	7844	40
38° 30′	0,6225	1,6064	0,7954	1,2572	1,2778	0,7826	51° 30′
40	6248	6005	8002	2497	2807	7808	20
50	6271	5948	8050	2423	2837	7790	10
39° 00′	0,6293	1,5890	0,8098	1,2349	1,2868	0,7771	51° 00
10	6316	5833	8146	2276	2898	7753	50
20	6338	5777	8195	2203	2929	7735	40
39° 30′	0,6361	1,5721	0,8243	1,2131	1,2960	0,7716	50° 30′
40	6383	5666	8292	2059	2991	7698	20
50	6406	5611	8342	1988	3022	7679	10
40° 00′	0,6428	1,5557	0,8391	1,1918	1,3054	0,7660	50° 00′
10	6450	5504	8441	1847	3086	7642	50
20	6472	5450	8491	1778	3118	7623	40
40° 30′	0,6494	1,5398	0,8541	1,1708	1,3151	0,7604	49° 30′
40	6517	5345	8591	1640	3184	7585	20
50	6539	5294	8642	1571	3217	7566	10
41° 00′	0,6561	1,5243	0,8693	1,1504	1,3250	0,7547	49′ 00′
10	6583	5192	8744	1436	3284	7528	50
20	6604	5141	8796	1369	3318	7509	40
41° 30′	0,6626	1,5092	0,8847	1,1303	1,3352	0,7490	48° 30″
40	6648	5042	8899	1237	3386	7470	20
50	6670	4993	8952	1171	3421	7451	10
42° 00′	0,6691	1,4945	0,9004	1,1106	1,3456	0,7431	48° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1
66	6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4
68	6,8	13,6	20,4	27,2	34,0	40,8	47,6	54,4	61,2
69	6,9	13,8	20,7	27,6	34,5	41,4	48,3	55,2	62,1
73	7,3	14,6	21,9	29,2	36,5	43,8	51,1	58,4	65,7
74	7,4	14,8	22,2	29,6	37,0	44,4	51,8	59,2	66,6
76	7,6	15,2	22,8	30,4	38,0	45,6	53,2	60,8	68,4

α	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α
42° 00′	0,6691	1,4945	0,9004	1,1106	1,3456	0,7431	48° 00′
10	6713	4897	9057	1041	3492	7412	50
20	6734	4849	9110	0977	3527	7392	40
42° 30′	0,6756	1,4802	0,9163	1,0913	1,3563	0,7373	47° 30′
40	6777	4755	9217	0850	3600	7353	20
50	6799	4709	9271	0786	3636	7333	10
43° 00′	0,6820	1,4663	0,9325	1,0724	1,3673	0,7314	47° 00′
10	6841	4617	9380	0661	3711	7294	50
20	6862	4572	9435	0599	3748	7274	40
43° 30′	0,6884	1,4527	0,9490	1,0538	1,3786	0,7254	46° 30′
40	6905	4483	9545	0477	3824	7234	20
50	6926	4439	9601	0416	3863	7214	10
44° 00′	0,6947	1,4396	0,9657	1,0355	1,3902	0,7193	46° 00′
10	6967	4352	9713	0295	3941	7173	50
20	6988	4310	9770	0235	3980	7153	40
44° 30′	0,7009	1,4267	0,9827	1,0176	1,4020	0,7133	45° 30′
40	7030	4225	9884	0117	4061	7112	20
50	7050	4183	9942	0058	4101	7092	10
45° 00′	0,7071	1,4142	1,0000	1,0000	1,4142	0,7071	45° 00′
α	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2

Таблица 22

Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90°, через каждые 0°,1

ctg	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
0°,0	∞	5729,6	2864,8	1909,9	1432,4	1145,9	954,9	818,5	716,2	636,6	89°,9
1	573,0	520,9	477,5	440,7	409,3	382,0	358,1	337,0	318,3	301,6	8
2	286,5	272,8	260,4	249,1	238,7	229,2	220,4	212,2	204,6	197,6	7
3	191,0	184,8	179,0	173,6	168,5	163,7	159,2	154,9	150,8	146,9	6
4	143,2	139,7	136,4	133,2	130,2	127,3	124,6	121,9	119,4	116,9	5
0°,5	114,6	112,3	110,2	108,1	106,1	104,2	102,3	100,5	98,78	97,11	89°,4
6	95,49	93,92	92,41	90,94	89,52	88,14	86,81	85,51	84,25	83,03	3
7	81,85	80,69	79,57	78,48	77,42	76,39	75,38	74,41	73,45	72,52	2
8	71,62	70,73	69,87	69,03	68,20	67,40	66,62	65,85	65,10	64,37	1
0°,9	63,66	62,96	62,27	61,60	60,95	60,31	59,68	59,06	58,46	57,87	89°,0
	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	tg

cosec	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
0°,0	∞	5729,6	2864,8	1909,9	1432,4	1145,9	954,9	818,5	716,2	636,6	89°,9
1	573,0	520,9	477,5	440,7	409,3	382,0	358,1	337,0	318,3	301,6	8
2	286,5	272,8	260,4	249,1	238,7	229,2	220,4	212,2	204,6	197,6	7
3	191,0	184,8	179,1	173,6	168,5	163,7	159,2	154,9	150,8	146,9	6
4	143,2	139,7	136,4	133,2	130,2	127,3	124,6	121,9	119,4	116,9	5
0°,5	114,6	112,3	110,2	108,1	106,1	104,2	102,3	100,5	98,79	97,11	89°,4
6	95,49	93,93	92,41	90,95	89,53	88,15	86,81	85,52	84,26	83,04	3
7	81,85	80,70	79,58	78,49	77,43	76,40	75,39	74,41	73,46	72,53	2
8	71,62	70,74	69,88	69,03	68,21	67,41	66,63	65,86	65,11	64,38	1
0°,9	63,63	62,97	62,28	61,61	60,96	60,31	59,69	59,07	58,47	57,88	89°,0
	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	sec

Продолжение табл. 22

ctg	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
1°,0	57,29	56,72	56,17	55,62	55,09	54,56	54,05	53,54	53,05	52,56	88°,9
1	52,08	51,61	51,15	50,70	50,25	49,82	49,39	48,96	48,55	48,14	8
2	47,74	47,34	46,96	46,57	46,20	45,83	45,47	45,11	44,75	44,41	7
3	44,07	43,73	43,40	43,07	42,75	42,43	42,12	41,81	41,51	41,21	6
4	40,92	40,63	40,34	40,06	39,78	39,51	39,24	38,97	38,70	38,44	5
1°,5	38,19	37,94	37,69	37,44	37,20	36,96	36,72	36,48	36,25	36,03	88°,4
6	35,80	35,58	35,36	35,14	34,93	34,72	34,51	34,30	34,09	33,89	3
7	33,69	33,50	33,30	33,11	32,92	32,73	32,54	32,36	32,18	32,00	2
8	31,82	31,64	31,47	31,30	31,13	30,96	30,79	30,63	30,47	30,30	1
1°,9	30,14	29,99	29,83	29,68	29,52	29,37	29,22	20,07	28,93	28,78	88°,0
	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	tg

cosec	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
1°,0	57,30	56,73	56,18	55,63	55,10	54,57	54,06	53,55	53,05	52,57	88°,9
1	52,09	51,62	51,16	50,71	50,26	49,83	49,40	48,97	48,56	48,15	8
2	47,75	47,36	46,97	46,59	46,21	45,84	45,48	45,12	44,77	44,42	7
3	44,08	43,74	43,41	43,08	42,76	42,45	42,13	41,83	41,52	41,22	6
4	40,93	40,64	40,35	40,07	39,79	39,52	39,25	38,98	38,72	38,46	5
1°,5	38,20	37,95	37,70	37,45	37,21	36,97	36,73	36,50	36,27	36,04	88°,4
6	35,81	35,59	35,37	35,16	34,94	34,73	34,52	34,31	34,11	33,91	3
7	33,71	33,51	33,32	33,12	32,93	32,75	32,56	32,38	32,19	32,01	2
8	31,84	31,66	31,49	31,31	31,14	30,98	30,81	30,64	30,48	30,32	1
1°,9	30,16	30,00	29,85	29,69	29,54	29,39	29,24	29,09	28,94	28,80	88°,0
	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	sec

ctg	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
2°,0	28,64	28,49	28,35	28,21	28,07	27,94	27,80	27,67	27,53	27,40	87°,9
1	27,27	27,14	27,01	26,89	26,76	26,64	26,51	26,39	26,27	26,15	8
2	26,03	25,91	25,80	25,68	25,57	25,45	25,34	25,23	25,12	25,01	7
3	24,90	24,79	24,68	24,58	24,47	24,37	24,26	24,16	24,06	23,96	6
4	23,86	23,76	23,66	23,56	23,47	23,37	23,28	23,18	23,09	23,00	5
2°,5	22,90	22,81	22,72	22,63	22,54	22,45	22,37	22,28	22,19	22,11	87°,4
6	22,02	21,94	21,85	21,77	21,69	21,61	21,52	21,44	21,36	21,28	3
7	21,20	21,13	21,05	20,97	20,89	20,82	20,74	20,67	20,59	20,52	2
8	20,45	20,37	20,30	20,23	20,16	20,09	20,02	19,95	19,88	19,81	1
2°,9	19,74	19,67	19,60	19,54	19,47	19,41	19,34	19,27	19,21	19,15	87°,0
	0 10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	tg

cosec	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
2°,0	28,65	28,51	28,37	28,23	28,09	27,96	27,82	27,69	27,55	27,42	87°,9
1	27,29	27,16	27,03	26,91	26,78	26,66	26,53	26,41	26,29	26,17	8
2	26,05	25,93	25,82	25,70	25,58	25,47	25,36	25,25	25,14	25,03	7
3	24,92	24,81	24,70	24,60	24,49	24,39	24.28	24,18	24,08	23,98	6
4	23,88	23,78	23,68	23,59	23,49	23,39	23,30	23,20	23,11	23,02	5
2°,5	22,93	22,83	22,74	22,65	22,56	22,48	22,39	22,30	22,22	22,13	87°,4
6	22,04	21,96	21,88	21,79	21,71	21,63	21,55	21,47	21,39	21,31	3
7	21,23	21,15	21,07	21,00	20,92	20,84	20,77	20,69	20,62	20,54	2
8	20,47	20,40	20,33	20,25	20,18	20,11	20,04	19,97	19,90	19,83	1
2°,9	19,77	19,70	19,63	19,56	19,50	19,43	19,37	19,30	19,24	19,17	87°,0
	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	sec

Натуральные значения

α°	sin	α″ cosec α	tg	α″ ctg α	sec	cos	α°
0,0	0,000000	206 265	0,000000	206 265	1,0000	1,0000	90,0
1	001745	265	001745	265	0000	0000	9
2	003491	265	003491	264	0000	0000	8
3	005236	266	005236	263	0000	0000	7
4	006981	266	006981	261	0000	0000	6
0,5	0,008727	206 267	0,008727	206 260	1,0000	1,0000	89,5
6	010472	269	010472	257	0001	0,9999	4
7	012217	270	012218	255	0001	9999	3
8	013962	272	013964	251	0001	9999	2
9	015707	273	015709	248	0001	9999	1
1,0	0,01745	206 275	0,01746	206 244	1,0002	0,9998	89,0
1	01920	277	01920	239	0002	9998	9
2	02094	280	02095	235	0002	9998	8
3	02269	283	02269	229	0002	9997	7
4	02443	285	02444	224	0003	9997	6
1,5	0,02618	206 288	0,02619	206 218	1,0003	0,9997	88,5
6	02792	292	02793	211	0004	9996	4
7	02967	295	02968	204	0004	9996	3
8	03141	299	03143	197	0005	9995	2
9	03316	303	03317	189	0006	9995	1
2,0	0,03490	206 307	0,03492	206 181	1,0006	0,9994	88,0
α°	cos	$\alpha'' \sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	ctg	$\alpha'' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8
173	17,3	34,6	51,9	69,2	86,5	103,8	121,1	138,4	155,7
174	17,4	34,8	52,2	69,6	87,0	104,4	121,8	139,2	156,6
175	17,5	35,0	52,5	70,0	87,5	105,0	122,5	140,0	157,5
176	17,6	35,2	52,8	70,4	88,0	105,6	123,2	140,8	158,4
177	17,7	35,4	53,1	70,8	88,5	106,2	123,9	141,6	159,3
1745	174,5	349,0	523,5	698,0	872,5	1047,0	1221,5	1396,0	1570,5
1746	174,6	349,2	523,8	698,4	873,0	1047,6	1222,2	1396,8	1571,4

Натуральные значения

α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
2,0	0,03490	28,65	0,03492	28,64	0,0006	0,9994	88,0
1	03664	27,29	03667	27,27	0007	9993	9
2	03839	26,05	03842	26,03	0007	9993	8
3	04013	24,92	04016	24,90	0008	9992	7
4	04188	23,88	04191	23,86	0009	9991	6
2,5	0,04362	22,93	0,04366	22,90	1,0010	0,9990	87,5
6	04536	22,04	04541	22,02	0010	9990	4
7	04711	21,23	04716	21,20	0011	9989	3
8	04885	20,47	04891	20,45	0012	9988	2
9	05059	19,77	05066	19,74	0013	9987	1
3,0	0,05234	19,11	0,05241	19,08	1,0014	0,9986	87,0
1	05408	18,49	05416	18,46	0015	9985	9
2	05582	17,91	05591	17,89	0016	9984	8
3	05756	17,37	05766	17,34	0017	9983	7
4	05931	16,86	05941	16,83	0018	9982	6
3,5	0,06105	16,38	0,06116	16,35	1,0019	0,9981	86,5
6	06279	15,93	06291	15,89	0020	9980	4
7	06453	15,50	06467	15,46	0021	9979	3
8	06627	15,09	06642	15,06	0022	9978	2
9	06802	14,70	06817	14,67	0023	9977	1
4,0	0,06976	14,34	0,06993	14,30	1,0024	0,9976	86,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
51	5,1	10,2	15,3	20,4	25,5	30,6	35,7	40,8	45,9
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
4,0	0,06976	14,34	0,06993	14,30	1,0024	0,9976	86,0
1	07150	13,99	07168	13,95	0026	9974	9
2	07324	13,65	07344	13,62	0027	9973	8
3	07498	13,34	07519	13,30	0028	9972	7
4	07672	13,03	07695	13,00	0030	9971	6
4,5	0,07846	12,75	0,07870	12,71	1,0031	0,9969	85,5
6	08020	12,47	08046	12,43	0032	9968	4
7	08194	12,20	08221	12,16	0034	9966	3
8	08368	11,95	08397	11,91	0035	9965	2
9	08542	11,71	08573	11,66	0037	9963	1
5,0	0,08716	11,47	0,08749	11,43	1,0038	0,9962	85,0
1	08889	11,25	08925	11,20	0040	9960	9
2	09063	11,03	09101	10,99	0041	9959	8
3	09237	10,83	09277	10,78	0043	9957	7
4	09411	10,63	09453	10,58	0045	9956	6
5,5	0,09585	10,433	0,09629	10,385	1,0046	0,9954	84,5
6	09758	10,248	09805	10,199	0048	9952	4
7	09932	10,068	09981	10,019	0050	9951	3
8	10106	9,895	10158	9,845	0051	9949	2
9	10279	9,728	10334	9,677	0053	9947	1
6,0	0,10453	9,567	0,10510	9,514	1,0055	0,9945	84,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
91	9,1	18,2	27,3	36,4	45,5	54,6	63,7	72,8	81,9
93	9,3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74,4	83,7
95	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	85,5
96	9,6	19,2	28,8	38,4	48,0	57,6	67,2	76,8	86,4
98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8	68,6	78,4	88,2
99	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5	59,4	69,3	79,2	89,1
103	10,3	20,6	30,9	41,2	51,5	61,8	72,1	82,4	92,7
104	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0	62,4	72,8	83,2	93,6
106	10,6	21,2	31,8	42,4	53,0	63,6	74,2	84,8	95,4
109	10,9	21,8	32,7	43,6	54,5	65,4	76,3	87,2	98,1
112	11,2	22,4	33,6	44,8	56,0	67,2	78,4	89,6	100,8
115	11,5	23,0	34,5	46,0	57,5	69,0	80,5	92,0	103,5
116	11,6	23,2	34,8	46,4	58,0	69,6	81,2	92,8	104,4

Натуральные значения							
$\alpha°$	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	$\alpha°$
6,0	0,1045	9,567	0,1051	9,514	1,0055	0,9945	84,0
1	1063	411	1069	357	0057	9943	9
2	1080	259	1086	205	0059	9942	8
3	1097	113	1104	058	0061	9940	7
4	1115	8,971	1122	8,915	0063	9938	6
6,5	0,1132	8,834	0,1139	8,777	1,0065	0,9936	83,5
6	1149	700	1157	643	0067	9934	4
7	1167	571	1175	513	0069	9932	3
8	1184	446	1192	386	0071	9930	2
9	1201	324	1210	264	0073	9928	1
7,0	0,1219	8,206	0,1228	8,144	1,0075	0,9925	83,0
1	1236	091	1246	028	0077	9923	9
2	1253	7,979	1263	7,916	0079	9921	8
3	1271	870	1281	806	0082	9919	7
4	1288	764	1299	700	0084	9917	6
7,5	0,1305	7,661	0,1317	7,596	1,0086	0,9914	82,5
6	1323	561	1334	495	0089	9912	4
7	1340	463	1352	396	0091	9910	3
8	1357	368	1370	300	0093	9907	2
9	1374	276	1388	207	0096	9905	1
8,0	0,1392	7,185	0,1405	7,115	1,0098	0,9903	82,0
$\alpha°$	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	$\alpha°$

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
118	11,8	23,6	35,4	47,2	59,0	70,8	82,6	94,4	106,2
122	12,2	24,4	36,6	48,8	61,0	73,2	85,4	97,6	109,8
125	12,5	25,0	37,5	50,0	62,5	75,0	87,5	100,0	112,5
127	12,7	25,4	38,1	50,8	63,5	76,2	88,9	101,6	114,3
129	12,9	25,8	38,7	51,6	64,5	77,4	90,3	103,2	116,1
134	13,4	26,8	40,2	53,6	67,0	80,4	93,8	107,2	120,6
137	13,7	27,4	41,1	54,8	68,5	82,2	95,9	109,6	123,3
138	13,8	27,6	41,4	55,2	69,0	82,8	96,6	110,4	124,2
142	14,2	28,4	42,6	56,8	71,0	85,2	99,4	113,6	127,8
146	14,6	29,2	43,8	58,4	73,0	87,6	102,2	116,8	131,4
147	14,7	29,4	44,1	58,8	73,5	88,2	102,9	117,6	132,3
152	15,2	30,4	45,6	60,8	76,0	91,2	106,4	121,6	136,8
156	15,6	31,2	46,8	62,4	78,0	93,6	109,2	124,8	140,4
157	15,7	31,4	47,1	62,8	78,5	94,2	109,9	125,6	141,3

Натуральные значения							
$\alpha°$	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	$\alpha°$
8,0	0,1392	7,185	0,1405	7,115	1,0098	0,9903	82,0
1	1409	097	1423	026	0101	9900	9
2	1426	011	1441	6,940	0103	9898	8
3	1444	6,927	1459	855	0106	9895	7
4	1461	845	1477	772	0108	9893	6
8,5	0,1478	6,765	0,1495	6,691	1,0111	0,9890	81,5
6	1495	687	1512	612	0114	9888	4
7	1513	611	1530	535	0116	9885	3
8	1530	537	1548	460	0119	9882	2
9	1547	464	1566	386	0122	9880	1
9,0	0,1564	6,392	0,1584	6,314	1,0125	0,9877	81,0
1	1582	323	1602	243	0127	9874	9
2	1599	255	1620	174	0130	9871	8
3	1616	188	1638	107	0133	9869	7
4	1633	123	1655	041	0136	9866	6
9,5	0,1650	6,059	0,1673	5,976	1,0139	0,9863	80,5
6	1668	5,996	1691	912	0142	9860	4
7	1685	935	1709	850	0145	9857	3
8	1702	875	1727	789	0148	9854	2
9	1719	816	1745	730	0151	9851	1
10,0	0,1736	5,759	0,1763	5,671	1,0154	0,9848	80,0
$\alpha°$	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	$\alpha°$

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8
63	6,3	12,6	18,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
65	6,5	13,0	19,5	26,0	32,5	39,0	45,5	52,0	58,5
72	7,2	14,4	21,6	28,8	36,0	43,2	50,4	57,6	64,8
74	7,4	14,8	22,2	29,6	37,0	44,4	51,8	59,2	66,6
76	7,6	15,2	22,8	30,4	38,0	45,6	53,2	60,8	68,4
78	7,8	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2
82	8,2	16,4	24,6	32,8	41,0	49,2	57,4	65,6	73,8
84	8,4	16,8	25,2	33,6	42,0	50,4	58,8	67,2	75,6
86	8,6	17,2	25,8	34,4	43,0	51,6	60,2	68,8	77,4

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
10,0	0,1736	5,759	0,1763	5,671	1,0154	0,9848	80,0
1	1754	702	1781	614	0157	9845	9
2	1771	647	1799	558	0161	9842	8
3	1788	593	1817	503	0164	9839	7
4	1805	540	1835	449	0167	9836	6
10,5	0,1822	5,487	0,1853	5,396	1,0170	0,9833	79,5
6	1840	436	1871	343	0174	9829	4
7	1857	386	1890	292	0177	9826	3
8	1874	337	1908	242	0180	9823	2
9	1891	288	1926	193	0184	9820	1
11,0	0,1908	5,241	0,1944	5,145	1,0187	0,9816	79,0
1	1925	194	1962	097	0191	9813	9
2	1942	148	1980	050	0194	9810	8
3	1959	103	1998	005	0198	9806	7
4	1977	059	2016	4,959	0201	9803	6
11,5	0,1994	5,016	0,2035	4,915	1,0205	0,9799	78,5
6	2011	4,973	2053	872	0209	9796	4
7	2028	931	2071	829	0212	9792	3
8	2045	890	2089	787	0216	9789	2
9	2062	850	2107	745	0220	9785	1
12,0	0,2079	4,810	0,2126	4,705	1,0223	0,9781	78,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
88	8,8	17,6	26,4	35,2	44,0	52,8	61,6	70,4	79,2

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
12,0	0,2079	4,810	0,2126	4,705	1,0223	0,9781	78,0
1	2096	771	2144	665	0227	9778	9
2	2113	732	2162	625	0231	9774	8
3	2130	694	2180	586	0235	9770	7
4	2147	657	2199	548	0239	9767	6
12,5	0,2164	4,620	0,2217	4,511	1,0243	0,9763	77,5
6	2181	584	2235	474	0247	9759	4
7	2198	549	2254	437	0251	9755	3
8	2215	514	2272	402	0255	9751	2
9	2233	479	2290	366	0259	9748	1
13,0	0,2250	4,445	0,2309	4,331	1,0263	0,9744	77,0
1	2267	412	2327	297	0267	9740	9
2	2284	379	2345	264	0271	9736	8
3	2300	347	2364	230	0276	9732	7
4	2317	315	2382	198	0280	9728	6
13,5	0,2334	4,284	0,2401	4,165	1,0284	0,9724	76,5
6	2351	253	2419	134	0288	9720	4
7	2368	222	2438	102	0293	9715	3
8	2385	192	2456	071	0297	9711	2
9	2402	163	2475	041	0302	9707	1
14,0	0,2419	4,134	0,2493	4,011	1,0306	0,9703	76,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7
4	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
14,0	0,2419	4,134	0,2493	4,011	1,0306	0,9703	76,0
1	2436	105	2512	3,981	0311	9699	9
2	2453	077	2530	952	0315	9694	8
3	2470	049	2549	923	0320	9690	7
4	2487	021	2568	895	0324	9686	6
14,5	0,2504	3,994	0,2586	3,867	1,0329	0,9681	75,5
6	2521	967	2605	839	0334	9677	4
7	2538	941	2623	812	0338	9673	3
8	2554	915	2642	785	0343	9668	2
9	2571	889	2661	758	0348	9664	1
15,0	0,2588	3,864	0,2679	3,732	1,0353	0,9659	75,0
1	2605	839	2698	706	0358	9655	9
2	2622	814	2717	681	0363	9650	8
3	2639	790	2736	655	0367	9646	7
4	2656	766	2754	630	0372	9641	6
15,5	0,2672	3,742	0,2773	3,606	1,0377	0,9636	74,5
6	2689	719	2792	582	0382	9632	4
7	2706	695	2811	558	0388	9627	3
8	2723	673	2830	534	0393	9622	2
9	2740	650	2849	511	0398	9617	1
16,0	0,2756	3,628	0,2867	3,487	1,0403	0,9613	74,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
31	3,1	6,2	9,3	12,4	15,5	18,6	21,7	24,8	27,9
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
40	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	36,0

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
16,0	0,2756	3,628	0,2867	3,487	1,0403	0,9613	74,0
1	2773	606	2886	465	0408	9608	9
2	2790	584	2905	442	0413	9603	8
3	2807	563	2924	420	0419	9598	7
4	2823	542	2943	398	0424	9593	6
16,5	0,2840	3,521	0,2962	3,376	1,0429	0,9588	73,5
6	2857	500	2981	354	0435	9583	4
7	2874	480	3000	333	0440	9578	3
8	2890	460	3019	312	0446	9573	2
9	2907	440	3038	291	0451	9568	1
17,0	0,2924	3,420	0,3057	3,271	1,0457	0,9563	73,0
1	2940	401	3076	251	0463	9558	9
2	2957	382	3096	230	0468	9553	8
3	2974	363	3115	211	0474	9548	7
4	2990	344	3134	191	0480	9542	6
17,5	0,3007	3,326	0,3153	3,172	1,0485	0,9537	72,5
6	3024	307	3172	152	0491	9532	4
7	3040	289	3191	133	0497	9527	3
8	3057	271	3211	115	0503	9521	2
9	3074	254	3230	096	0509	9516	1
18,0	0,3090	3,236	0,3249	3,078	1,0515	0,9511	72,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4
8	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2
10	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
20	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0
21	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	14,7	16,8	18,9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7

Натуральные значения							
$\alpha°$	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	$\alpha°$
18,0	0,3090	3,236	0,3249	3,078	1,0515	0,9511	72,0
1	3107	219	3269	060	0521	9505	9
2	3123	202	3288	042	0527	9500	8
3	3140	185	3307	024	0533	9494	7
4	3156	168	3327	006	0539	9489	6
18,5	0,3173	3,152	0,3346	2,989	1,0545	0,9483	71,5
6	3190	135	3365	971	0551	9478	4
7	3206	119	3385	954	0557	9472	3
8	3223	103	3404	937	0564	9466	2
9	3239	087	3424	921	0570	9461	1
19,0	0,3256	3,072	0,3443	2,904	1,0576	0,9455	71,0
1	3272	056	3463	888	0583	9449	9
2	3289	041	3482	872	0589	9444	8
3	3305	026	3502	856	0595	9438	7
4	3322	011	3522	840	0602	9432	6
19,5	0,3338	2,996	0,3541	2,824	1,0608	0,9426	70,5
6	3355	981	3561	808	0615	9421	4
7	3371	967	3581	793	0622	9415	3
8	3387	952	3600	778	0628	9409	2
9	3404	938	3620	762	0635	9403	1
20,0	0,3420	2,924	0,3640	2,747	1,0642	0,9397	70,0
1	3437	910	3659	733	0649	9391	9
2	3453	896	3679	718	0655	9385	8
3	3469	882	3699	703	0662	9379	7
4	3486	869	3719	689	0669	9373	6
20,5	0,3502	2,855	0,3739	2,675	1,0676	0,9367	69,5
6	3518	842	3759	660	0683	9361	4
7	3535	829	3779	646	0690	9354	3
8	3551	816	3799	633	0697	9348	2
9	3567	803	3819	619	0704	9342	1
21,0	0,3584	2,790	0,3839	2,605	1,0711	0,9336	69,0
$\alpha°$	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	$\alpha°$

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
21,0	0,3584	2,790	0,3839	2,605	1,0711	0,9336	69,0
1	3600	778	3859	592	0719	9330	9
2	3616	765	3879	578	0726	9323	8
3	3633	753	3899	565	0733	9317	7
4	3649	741	3919	552	0740	9311	6
21,5	0,3665	2,729	0,3939	2,539	1,0748	0,9304	68,5
6	3681	716	3959	526	0755	9298	4
7	3697	705	3979	513	0763	9291	3
8	3714	693	4000	500	0770	9285	2
9	3730	681	4020	488	0778	9278	1
22,0	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,0785	0,9272	68,0
1	3762	658	4061	463	0793	9265	9
2	3778	647	4081	450	0801	9259	8
3	3795	635	4101	438	0808	9252	7
4	3811	624	4122	426	0816	9245	6
22,5	0,3827	2,613	0,4142	2,414	1,0824	0,9239	67,5
6	3843	602	4163	402	0832	9232	4
7	3859	591	4183	391	0840	9225	3
8	3875	581	4204	379	0848	9219	2
9	3891	570	4224	367	0856	9212	1
23,0	0,3907	2,559	0,4245	2,356	1,0864	0,9205	67,0
1	3923	549	4265	344	0872	9198	9
2	3939	538	4286	333	0880	9191	8
3	3955	528	4307	322	0888	9184	7
4	3971	518	4327	311	0896	9178	6
23,5	0,3987	2,508	0,4348	2,300	1,0904	0,9171	66,5
6	4003	498	4369	289	0913	9164	4
7	4019	488	4390	278	0921	9157	3
8	4035	478	4411	267	0929	9150	2
9	4051	468	4431	257	0938	9143	1
24,0	0,4067	2,459	0,4452	2,246	1,0946	0,9135	66,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1
11	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
24,0	0,4067	2,459	0,4452	2,246	1,0946	0,9135	66,0
1	4083	449	4473	236	0955	9128	9
2	4099	439	4494	225	0963	9121	8
3	4115	430	4515	215	0972	9114	7
4	4131	421	4536	204	0981	9107	6
24,5	0,4147	2,411	0,4557	2,194	1,0989	0,9100	65,5
6	4163	402	4578	184	0998	9092	4
7	4179	393	4599	174	1007	9085	3
8	4195	384	4621	164	1016	9078	2
9	4210	375	4642	154	1025	9070	1
25,0	0,4226	2,366	0,4663	2,145	1,1034	0,9063	65,0
1	4242	357	4684	135	1043	9056	9
2	4258	349	4706	125	1052	9048	8
3	4274	340	4727	116	1061	9041	7
4	4289	331	4748	106	1070	9033	6
25,5	0,4305	2,323	0,4770	2,097	1,1079	0,9026	64,5
6	4321	314	4791	087	1089	9018	4
7	4337	306	4813	078	1098	9011	3
8	4352	298	4834	069	1107	9003	2
9	4368	289	4856	059	1117	8996	1
26,0	0,4384	2,281	0,4877	2,050	1,1126	0,8988	64,0
1	4399	273	4899	041	1136	8980	9
2	4415	265	4921	032	1145	8973	8
3	4431	257	4942	023	1155	8965	7
4	4446	249	4964	015	1164	8957	6
26,5	0,4462	2,241	0,4986	2,0057	1,1174	0,8949	63,5
6	4478	233	5008	1,9970	1184	8942	4
7	4493	226	5029	9883	1194	8934	3
8	4509	218	5051	9797	1203	8926	2
9	4524	210	5073	9711	1213	8918	1
27,0	0,4540	2,203	0,5095	1,9626	1,1223	0,8910	63,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
85	8,5	17,0	25,5	34,0	42,5	51,0	59,5	68,0	76,5
86	8,6	17,2	25,8	34,4	43,0	51,6	60,2	68,8	77,4
87	8,7	17,4	26,1	34,8	43,5	52,2	60,9	69,6	78,3

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
27,0	0,4540	2,203	0,5095	1,9626	1,1223	0,8910	63,0
1	4555	195	5117	9542	1233	8902	9
2	4571	188	5139	9458	1243	8894	8
3	4586	180	5161	9375	1253	8886	7
4	4602	173	5184	9292	1264	8878	6
27,5	0,4617	2,166	0,5206	1,9210	1,1274	0,8870	62,5
6	4633	158	5228	9128	1284	8862	4
7	4648	151	5250	9047	1294	8854	3
8	4664	144	5272	8967	1305	8846	2
9	4679	137	5295	8887	1315	8838	1
28,0	0,4695	2,130	0,5317	1,8807	1,1326	0,8829	62,0
1	4710	123	5340	8728	1336	8821	9
2	4726	116	5362	8650	1347	8813	8
3	4741	109	5384	8572	1357	8805	7
4	4756	102	5407	8495	1368	8796	6
28,5	0,4772	2,096	0,5430	1,8418	1,1379	0,8788	61,5
6	4787	089	5452	8341	1390	8780	4
7	4802	082	5475	8265	1401	8771	3
8	4818	076	5498	8190	1412	8763	2
9	4833	069	5520	8115	1423	8755	1
29,0	0,4848	2,063	0,5543	1,8040	1,1434	0,8746	61,0
1	4863	056	5566	7966	1445	8738	9
2	4879	050	5589	7893	1456	8729	8
3	4894	043	5612	7820	1467	8721	7
4	4909	037	5635	7747	1478	8712	6
29,5	0,4924	2,031	0,5658	1,7675	1,1490	0,8704	60,5
6	4939	025	5681	7603	1501	8695	4
7	4955	018	5704	7532	1512	8686	3
8	4970	012	5727	7461	1524	8678	2
9	4985	006	5750	7391	1535	8669	1
30,0	0,5000	2,000	0,5774	1,7321	1,1547	0,8660	60,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1

Натуральные значения							
$\alpha°$	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	$\alpha°$
30,0	0,5000	2,0000	0,5774	1,7321	1,1547	0,8660	60,0
1	5015	1,9940	5797	7251	1559	8652	9
2	5030	9880	5820	7182	1570	8643	8
3	5045	9821	5844	7113	1582	8634	7
4	5060	9762	5867	7045	1594	8625	6
30,5	0,5075	1,9703	0,5890	1,6977	1,1606	0,8616	59,5
6	5090	9645	5914	6909	1618	8607	4
7	5105	9587	5938	6842	1630	8599	3
8	5120	9530	5961	6775	1642	8590	2
9	5135	9473	5985	6709	1654	8581	1
31,0	0,5150	1,9416	0,6009	1,6643	1,1666	0,8572	59,0
1	5165	9360	6032	6577	1679	8563	9
2	5180	9304	6056	6512	1691	8554	8
3	5195	9249	6080	6447	1703	8545	7
4	5210	9194	6104	6383	1716	8536	6
31,5	0,5225	1,9139	0,6128	1,6319	1,1728	0,8526	58,5
6	5240	9084	6152	6255	1741	8517	4
7	5255	9031	6176	6191	1753	8508	3
8	5270	8977	6200	6128	1766	8499	2
9	5284	8924	6224	6066	1779	8490	1
32,0	0,5299	1,8871	0,6249	1,6003	1,1792	0,8480	58,0
1	5314	8818	6273	5941	1805	8471	9
2	5329	8766	6297	5880	1818	8462	8
3	5344	8714	6322	5818	1831	8453	7
4	5358	8663	6346	5757	1844	8443	6
32,5	0,5373	1,8612	0,6371	1,5697	1,1857	0,8434	57,5
6	5388	8561	6395	5637	1870	8425	4
7	5402	8510	6420	5577	1883	8415	3
8	5417	8460	6445	5517	1897	8406	2
9	5432	8410	6469	5458	1910	8396	1
33,0	0,5446	1,8361	0,6494	1,5399	1,1924	0,8387	57,0
$\alpha°$	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	$\alpha°$

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
33,0	0,5446	1,8361	0,6494	1,5399	1,1924	0,8387	57,0
1	5461	8312	6519	5340	1937	8377	9
2	5476	8263	6544	5282	1951	8368	8
3	5490	8214	6569	5224	1964	8358	7
4	5505	8166	6594	5166	1978	8348	6
33,5	0,5519	1,8118	0,6619	1,5108	1,1992	0,8339	56,5
6	5534	8070	6644	5051	2006	8329	4
7	5548	8023	6669	4994	2020	8320	3
8	5563	7976	6694	4938	2034	8310	2
9	5577	7929	6720	4882	2048	8300	1
34,0	0,5592	1,7883	0,6745	1,4826	1,2062	0,8290	56,0
1	5606	7837	6771	4770	2076	8281	9
2	5621	7791	6796	4715	2091	8271	8
3	5635	7745	6822	4659	2105	8261	7
4	5650	7700	6847	4605	2120	8251	6
34,5	0,5664	1,7655	0,6873	1,4550	1,2134	0,8241	55,5
6	5678	7610	6899	4496	2149	8231	4
7	5693	7566	6924	4442	2163	8221	3
8	5707	7522	6950	4388	2178	8211	2
9	5721	7478	6976	4335	2193	8202	1
35,0	0,5736	1,7434	0,7002	1,4281	1,2208	0,8192	55,0
1	5750	7391	7028	4229	2223	8181	9
2	5764	7348	7054	4176	2238	8171	8
3	5779	7305	7080	4124	2253	8161	7
4	5793	7263	7107	4071	2268	8151	6
35,5	0,5807	1,7221	0,7133	1,4019	1,2283	0,8141	54,5
6	5821	7179	7159	3968	2299	8131	4
7	5835	7137	7186	3916	2314	8121	3
8	5850	7095	7212	3865	2329	8111	2
9	5864	7054	7239	3814	2345	8100	1
36,0	0,5878	1,7013	0,7265	1,3764	1,2361	0,8090	54,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5

Натуральные значения							
$\alpha°$	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	$\alpha°$
36,0	0,5878	1,7013	0,7265	1,3764	1,2361	0,8090	54,0
1	5892	6972	7292	3713	2376	8080	9
2	5906	6932	7319	3663	2392	8070	8
3	5920	6892	7346	3613	2408	8059	7
4	5934	6852	7373	3564	2424	8049	6
36,5	0,5948	1,6812	0,7400	1,3514	1,2440	0,8039	53,5
6	5962	6772	7427	3465	2456	8028	4
7	5976	6733	7454	3416	2472	8018	3
8	5990	6694	7481	3367	2489	8007	2
9	6004	6655	7508	3319	2505	7997	1
37,0	0,6018	1,6616	0,7536	1,3270	1,2521	0,7986	53,0
1	6032	6578	7563	3222	2538	7976	9
2	6046	6540	7590	3175	2554	7965	8
3	6060	6502	7618	3127	2571	7955	7
4	6074	6464	7646	3079	2588	7944	6
37,5	0,6088	1,6427	0,7673	1,3032	1,2605	0,7934	52,5
6	6101	6390	7701	2985	2622	7923	4
7	6115	6353	7729	2938	2639	7912	3
8	6129	6316	7757	2892	2656	7902	2
9	6143	6279	7785	2846	2673	7891	1
38,0	0,6157	1,6243	0,7813	1,2799	1,2690	0,7880	52,0
1	6170	6207	7841	2753	2708	7869	9
2	6184	6171	7869	2708	2725	7859	8
3	6198	6135	7898	2662	2742	7848	7
4	6211	6099	7926	2617	2760	7837	6
38,5	0,6225	1,6064	0,7954	1,2572	1,2778	0,7826	51,5
6	6239	6029	7983	2527	2796	7815	4
7	6252	5994	8012	2482	2813	7804	3
8	6266	5959	8040	2437	2831	7793	2
9	6280	5925	8069	2393	2849	7782	1
39,0	0,6293	1,5890	0,8098	1,2349	1,2868	0,7771	51,0
$\alpha°$	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	$\alpha°$

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
39,0	0,6293	1,5890	0,8098	1,2349	1,2868	0,7771	51,0
1	6307	5856	8127	2305	2886	7760	9
2	6320	5822	8156	2261	2904	7749	8
3	6334	5788	8185	2218	2923	7738	7
4	6347	5755	8214	2174	2941	7727	6
39,5	0,6361	1,5721	0,8243	1,2131	1,2960	0,7716	50,5
6	6374	5688	8273	2088	2978	7705	4
7	6388	5655	8302	2045	2997	7694	3
8	6401	5622	8332	2002	3016	7683	2
9	6414	5590	8361	1960	3035	7672	1
40,0	0,6428	1,5557	0,8391	1,1918	1,3054	0,7660	50,0
1	6441	5525	8421	1875	3073	7649	9
2	6455	5493	8451	1833	3093	7638	8
3	6468	5461	8481	1792	3112	7627	7
4	6481	5429	8511	1750	3131	7615	6
40,5	0,6494	1,5398	0,8541	1,1708	1,3151	0,7604	49,5
6	6508	5366	8571	1667	3171	7593	4
7	6521	5335	8601	1626	3190	7581	3
8	6534	5304	8632	1585	3210	7570	2
9	6547	5273	8662	1544	3230	7559	1
41,0	0,6561	1,5243	0,8693	1,1504	1,3250	0,7547	49,0
1	6574	5212	8724	1463	3270	7536	9
2	6587	5182	8754	1423	3291	7524	8
3	6600	5151	8785	1383	3311	7513	7
4	6613	5121	8816	1343	3331	7501	6
41,5	0,6626	1,5092	0,8847	1,1303	1,3352	0,7490	48,5
6	6639	5062	8878	1263	3373	7478	4
7	6652	5032	8910	1224	3393	7466	3
8	6665	5003	8941	1184	3414	7455	2
9	6678	4974	8972	1145	3435	7443	1
42,0	0,6691	1,4945	0,9004	1,1106	1,3456	0,7431	48,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
41	4,1	8,2	12,3	16,4	20,5	24,6	28,7	32,8	36,9
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7

Натуральные значения							
α°	sin	cosec	tg	ctg	sec	cos	α°
42,0	0,6691	1,4945	0,9004	1,1106	1,3456	0,7431	48,0
1	6704	4916	9036	1067	3478	7420	9
2	6717	4887	9067	1028	3499	7408	8
3	6730	4859	9099	0990	3520	7396	7
4	6743	4830	9131	0951	3542	7385	6
42,5	0,6756	1,4802	0,9163	1,0913	1,3563	0,7373	47,5
6	6769	4774	9195	0875	3585	7361	4
7	6782	4746	9228	0837	3607	7349	3
8	6794	4718	9260	0799	3629	7337	2
9	6807	4690	9293	0761	3651	7325	1
43,0	0,6820	1,4663	0,9325	1,0724	1,3673	0,7314	47,0
1	6833	4635	9358	0686	3696	7302	9
2	6845	4608	9391	0649	3718	7290	8
3	6858	4581	9424	0612	3741	7278	7
4	6871	4554	9457	0575	3763	7266	6
43,5	0,6884	1,4527	0,9490	1,0538	1,3786	0,7254	46,5
6	6896	4501	9523	0501	3809	7242	4
7	6909	4474	9556	0464	3832	7230	3
8	6921	4448	9590	0428	3855	7218	2
9	6934	4422	9623	0392	3878	7206	1
44,0	0,6947	1,4396	0,9657	1,0355	1,3902	0,7193	46,0
1	6959	4370	9691	0319	3925	7181	9
2	6972	4344	9725	0283	3949	7169	8
3	6984	4318	9759	0247	3972	7157	7
4	6997	4293	9793	0212	3996	7145	6
44,5	0,7009	1,4267	0,9827	1,0176	1,4020	0,7133	45,5
6	7022	4242	9861	0141	4044	7120	4
7	7034	4217	9896	0105	4069	7108	3
8	7046	4192	9930	0070	4093	7096	2
9	7059	4167	9965	0035	4118	7083	1
45,0	0,7071	1,4142	1,0000	1,0000	1,4142	0,7071	45,0
α°	cos	sec	ctg	tg	cosec	sin	α°

d	Пропорциональные части								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1

Таблица 23

Натуральные значения тригонометрических функций для углов в радианной мере

Натуральные значения синусов											
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0699	0799	0899	0,0
0,1	0,0998	1098	1197	1296	1395	1494	1593	1692	1790	1889	0,1
0,2	0,1987	2085	2182	2280	2377	2474	2571	2667	2764	2860	0,2
0,3	0,2955	3051	3146	3240	3335	3429	3523	3616	3709	3802	0,3
0,4	0,3894	3986	4078	4169	4259	4350	4439	4529	4618	4706	0,4
0,5	0,4794	4882	4969	5055	5141	5227	5312	5396	5480	5564	0,5
0,6	0,5646	5729	5810	5891	5972	6052	6131	6210	6288	6365	0,6
0,7	0,6442	6518	6594	6669	6743	6816	6889	6961	7033	7104	0,7
0,8	0,7174	7243	7311	7379	7446	7513	7578	7643	7707	7771	0,8
0,9	0,7833	7895	7956	8016	8076	8134	8192	8249	8305	8360	0,9
1,0	0,8415	8468	8521	8573	8624	8674	8724	8772	8820	8866	1,0
1,1	0,8912	8957	9001	9044	9086	9128	9168	9208	9246	9284	1,1
1,2	0,9320	9356	9391	9425	9458	9490	9521	9551	9580	9608	1,2
1,3	0,9636	9662	9687	9711	9735	9757	9779	9799	9819	9837	1,3
1,4	0,9854	9871	9887	9901	9915	9927	9939	9949	9959	9967	1,4
1,5	0,9975	9982	9987	9992	9995	9998	9999	1,0000	—	—	1,5
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
Натуральные значения синусов											

Пример. $\sin 1{,}24 = 0{,}9458$.

Натуральные значения косинусов											
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	1,0000	0000	·9998	·9996	·9992	·9988	·9982	·9976	·9968	·9960	0,0
0,1	0,9950	9940	9928	9916	9902	9888	9872	9856	9838	9820	0,1
0,2	0,9801	9780	9759	9737	9713	9689	9664	9638	9611	9582	0,2
0,3	0,9553	9523	9492	9460	9428	9394	9359	9323	9287	9249	0,3
0,4	0,9211	9171	9131	9090	9048	9004	8961	8916	8870	8823	0,4
0,5	0,8776	8727	8678	8628	8577	8525	8473	8419	8365	8309	0,5
0,6	0,8253	8196	8139	8080	8021	7961	7900	7838	7776	7712	0,6
0,7	0,7648	7584	7518	7452	7385	7317	7248	7179	7109	7038	0,7
0,8	0,6967	6895	6822	6749	6675	6600	6524	6448	6372	6294	0,8
0,9	0,6216	6137	6058	5978	5898	5817	5735	5653	5570	5487	0,9
1,0	0,5403	5319	5234	5148	5062	4976	4889	4801	4713	4625	1,0
1,1	0,4536	4447	4357	4267	4176	4085	3993	3902	3809	3717	1,1
1,2	0,3624	3530	3436	3342	3248	3153	3058	2963	2867	2771	1,2
1,3	0,2675	2579	2482	2385	2288	2190	2092	1994	1896	1798	1,3
1,4	0,1700	1601	1502	1403	1304	1205	1106	1006	0907	0807	1,4
1,5	0,0707	0608	0508	0408	0308	0208	0108	0008	—	—	1,5
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
Натуральные значения косинусов											

Продолжение табл. 23

Натуральные значения тангенсов

ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0601	0701	0802	0902	0,0
0,1	0,1003	1104	1206	1307	1409	1511	1614	1717	1820	1923	0,1
0,2	0,2027	2131	2236	2341	2447	2553	2660	2768	2876	2984	0,2
0,3	0,3093	3203	3314	3425	3537	3650	3764	3879	3994	4111	0,3
0,4	0,4228	4346	4466	4586	4708	4831	4954	5080	5206	5334	0,4
0,5	0,5463	5594	5726	5859	5994	6131	6269	6410	6552	6696	0,5
0,6	0,6841	6989	7139	7291	7445	7602	7761	7923	8087	8253	0,6
0,7	0,8423	8595	8771	8949	9131	9316	9505	9697	9893	·0092	0,7
0,8	1,0296	0505	0717	0934	1156	1383	1616	1853	2097	2346	0,8
0,9	1,2602	2864	3133	3409	3692	3984	4284	4592	4910	5237	0,9
1,0	1,5574	5922	6281	6652	7036	7433	7844	8270	8712	9171	1,0
1,1	1,9648	·0143	·0660	·1198	·1759	·2345	·2958	·3600	·4273	·4979	1,1
1,2	2,572	650	733	820	912	·010	·113	·224	·341	·467	1,2
1,3	3,602	747	903	4,072	4,256	4,455	4,673	4,913	5,177	5,471	1,3
1,4	5,798	6,165	6,581	7,055	7,602	8,238	8,989	9,887	10,98	12,35	1,4
1,5	14,10	16,43	19,67	24,50	32,46	48,08	92,62	1255,8	—	—	1,5

ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°

Натуральные значения тангенсов

Натуральные значения котангенсов											
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
0,0	—	100,0	49,99	33,32	24,99	19,98	16,65	14,26	12,47	11,08	0,0
0,1	9,967	9,054	8,293	7,649	7,096	6,617	6,197	5,826	5,495	5,200	0,1
0,2	4,933	692	472	271	086	·916	·759	·613	·478	·351	0,2
0,3	3,2327	1218	0176	·9195	·8270	·7395	·6567	·5782	·5037	·4328	0,3
0,4	2,3652	3008	2393	1804	1241	0702	0184	·9686	·9208	·8748	0,4
0,5	1,8305	7878	7465	7067	6683	6310	5950	5601	5263	4935	0,5
0,6	1,4617	4308	4007	3715	3431	3154	2885	2622	2366	2116	0,6
0,7	1,1872	1634	1402	1174	0952	0734	0521	0313	0109	·9908	0,7
0,8	0,9712	9520	9331	9146	8964	8785	8609	8437	8267	8100	0,8
0,9	0,7936	7774	7615	7458	7303	7151	7001	6853	6707	6563	0,9
1,0	0,6421	6281	6142	6005	5870	5736	5604	5473	5344	5216	1,0
1,1	0,5090	4964	4840	4718	4596	4475	4356	4237	4120	4003	1,1
1,2	0,3888	3773	3659	3546	3434	3323	3212	3102	2993	2884	1,2
1,3	0,2776	2669	2562	2456	2350	2245	2140	2035	1931	1828	1,3
1,4	0,1725	1622	1519	1417	1315	1214	1113	1011	0910	0810	1,4
1,5	0,0709	0609	0508	0408	0308	0208	0108	0008	—	—	1,5
ρ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ°
Натуральные значения котангенсов											

Таблица 24

Обратные тригонометрические функции

Арксинусы

ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	0,0
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1912	0,1
0,2	0,2014	2116	2218	2321	2424	2527	2630	2734	2838	2942	0,2
0,3	0,3047	3152	3257	3363	3469	3576	3683	3790	3898	4006	0,3
0,4	0,4115	4225	4334	4445	4556	4668	4780	4893	5007	5121	0,4
0,5	0,5236	5352	5469	5586	5704	5824	5944	6065	6187	6311	0,5
0,6	0,6435	6561	6687	6816	6945	7076	7208	7342	7478	7615	0,6
0,7	0,7754	7895	8038	8183	8331	8481	8633	8788	8947	9108	0,7
0,8	0,9273	9442	9614	9791	9973	·0160	·0353	·0552	·0759	·0973	0,8
0,9	1,1198	1433	1681	1944	2226	2532	2870	3252	3705	4293	0,9
1,0	1,5708	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0

Арккосинусы

ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ
0,0	1,5708	5608	5508	5408	5308	5208	5108	5007	4907	4807	0,0
0,1	1,4706	4606	4505	4404	4303	4202	4101	4000	3898	3796	0,1
0,2	1,3694	3592	3490	3387	3284	3181	3078	2974	2870	2766	0,2
0,3	1,2661	2556	2451	2345	2239	2132	2025	1918	1810	1702	0,3
0,4	1,1593	1483	1374	1263	1152	1040	0928	0815	0701	0587	0,4
0,5	1,0472	0356	0239	0122	0004	·9884	·9764	·9643	·9521	·9397	0,5
0,6	0,9273	9147	9021	8892	8763	8632	8500	8366	8230	8093	0,6
0,7	0,7954	7813	7670	7525	7377	7227	7075	6920	6761	6600	0,7
0,8	0,6435	6266	6094	5917	5735	5548	5355	5156	4949	4735	0,8
0,9	0,4510	4275	4027	3764	3482	3176	2838	2456	2003	1415	0,9
1,0	0,0000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0

Примеры: 1. arc sin 0,42 = 0,4334, 2. arc cos 0,55 = 0,9884.

Арктангенсы

ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	0,0
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	0,1
0,2	0,1974	2070	2166	2261	2355	2450	2544	2637	2730	2823	0,2
0,3	0,2915	3006	3097	3187	3277	3367	3456	3544	3631	3719	0,3
0,4	0,3805	3891	3976	4061	4145	4229	4311	4394	4475	4556	0,4
0,5	0,4636	4716	4795	4874	4951	5028	5105	5181	5256	5330	0,5
0,6	0,5404	5477	5550	5622	5693	5764	5834	5903	5972	6040	0,6
0,7	0,6107	6174	6240	6306	6371	6435	6499	6562	6624	6686	0,7
0,8	0,6747	6808	6868	6928	6987	7045	7103	7160	7217	7273	0,8
0,9	0,7328	7383	7438	7491	7545	7598	7650	7702	7753	7804	0,9
1,0	0,7854	7904	7953	8002	8050	8098	8145	8192	8238	8284	1,0
1,1	0,8330	8375	8419	8464	8507	8551	8593	8636	8678	8719	1,1
1,2	0,8761	8801	8842	8882	8921	8961	8999	9038	9076	9114	1,2
1,3	0,9151	9188	9225	9261	9297	9332	9363	9403	9437	9472	1,3
1,4	0,9505	9539	9572	9605	9638	9670	9703	9734	9766	9797	1,4
1,5	0,9828	9859	9889	9919	9949	9978	1,0008	1,0037	1,0065	1,0094	1,5
ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ

Арктангенсы

Пример. arc tg 0,87 = 0,7160.

Продолжение табл. 24

Арккотангенсы

ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ
0,0	1,5708	5608	5508	5408	5308	5208	5109	5009	4910	4810	0,0
0,1	1,4711	4612	4514	4415	4317	4219	4121	4024	3927	3830	0,1
0,2	1,3734	3638	3542	3447	3353	3258	3164	3071	2978	2885	0,2
0,3	1,2793	2702	2611	2520	2431	2341	2252	2164	2076	1989	0,3
0,4	1,1903	1817	1732	1647	1563	1479	1397	1314	1233	1152	0,4
0,5	1,1071	0992	0913	0834	0757	0680	0603	0527	0452	0378	0,5
0,6	1,0304	0231	0158	0086	0015	·9944	·9874	·9805	·9736	·9668	0,6
0,7	0,9601	9534	9468	9402	9337	9273	9209	9146	9084	9022	0,7
0,8	0,8961	8900	8840	8780	8721	8663	8605	8548	8491	8435	0,8
0,9	0,8380	8325	8270	8217	8163	8110	8058	8006	7955	7904	0,9
1,0	0,7854	7804	7755	7706	7658	7610	7563	7516	7470	7424	1,0
1,1	0,7378	7333	7289	7244	7201	7157	7115	7072	7030	6989	1,1
1,2	0,6947	6907	6866	6826	6787	6747	6709	6670	6632	6594	1,2
1,3	0,6557	6520	6483	6447	6411	6375	6340	6305	6271	6236	1,3
1,4	0,6202	6169	6136	6103	6070	6037	6005	5974	5942	5911	1,4
1,5	0,5880	5849	5819	5789	5759	5730	5700	5671	5643	5614	1,5
ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ

Арккотангенсы

Примеры: 1. arc ctg 1,24 = 0,6787, 2. arc ctg 0,69 = 0,9668.

Таблица 25

Перевод углов из градусной меры в радианы

(Длины дуг окружности радиуса 1)

°	Радианы	°	Радианы	′	Радианы	′	Радианы
1	0,01745	140	2,4435	1	0,0002909	24	0,006981
2	03491	150	6180	2	0005818	25	007272
3	05236	160	7925	3	0008727	26	007563
4	0,06981	170	9671	4	0,001164	27	0,007854
5	08727	180	3,1416	5	001454	28	008145
6	0,1047	190	3161	6	001745	29	008436
7	0,1222	200	3,4906	7	0,002036	30	0,008727
8	1396	210	6652	8	002327	31	009018
9	1571	220	8397	9	002618	32	009308
10	0,1745	230	4,0143	10	0,002909	33	0,009599
20	3491	240	1888	11	003200	34	009890
30	5236	250	3633	12	003491	35	01018
40	0,6981	260	4,5379	13	0,003781	36	0,01047
50	8727	270	7124	14	004072	37	01076
60	1,0472	280	8869	15	004363	38	01105
70	1.2217	290	5,0615	16	0,004654	39	0,01134
80	3963	300	2360	17	004945	40	01164
90	5708	310	4105	18	005236	41	01193
100	1,7453	320	5,5851	19	0,005527	42	0,01222
110	9199	330	7596	20	005818	43	01251
120	2,0944	340	9341	21	006109	44	01280
				22	006400	45	01309
130	2,2689	350	6.1087	23	0,006690	50	0,01454

″	Радианы	″	Радианы	″	Радианы	″	Радианы
1	0,000004848	5	0,00002424	9	0,00004363	40	0,0001939
2	9696	6	2909	10	4848	45	2182
3	0,00001454	7	3394	20	9696	50	2424
4	1939	8	3879	30	0,0001454	55	2666

Примечание. 1 радиан (дуга, равная радиусу) равен 57° 17′ 44″,8.

Пример. 56° 16′ 33″

50°	= 0,8727
6°	= 0,1047
16′	= 0,00465
30″	= 0,00015
3″	= 0,00001
56° 16′ 33″	= 0,9822ρ.

Таблица 26

Перевод радианов в градусную меру

Радианы	Градусная мера	Радианы	Градусная мера
1	57° 17′ 44″,8	0,001	0° 03′ 26″,3
2	114 35 29,6	2	0 06 52,5
3	171 53 14,4	3	0 10 18,8
4	229° 10′ 59″,2	0,004	0° 13′ 45″,1
5	286 28 44,0	5	0 17 11,3
6	343 46 28,8	6	0 20 37,6
7	401° 04′ 13″,6	0,007	0° 24′ 03″,9
8	458 21 58,5	8	0 27 30,1
9	515 39 43,3	9	0 30 56,4
0,1	5° 43′ 46″,5	0,0001	0° 00′ 20″,6
2	11 27 33,0	2	0 00 41,3
3	17 11 19,4	3	0 01 01,9
0,4	22° 55′ 05″,9	0,0004	0° 01′ 22″,5
5	28 38 52,4	5	0 01 43,1
6	34 22 38,9	6	0 02 03,8
0,7	40° 06′ 25″,4	0,0007	0° 02′ 24″,4
8	45 50 11,8	8	0 02 45,0
9	51 33 58,3	9	0 03 05,6
0,01	0° 34′ 22″,6	0,00001	0° 00′ 02″,1
2	1 08 45,3	2	0 00 04,1
3	1 43 07,9	3	0 00 06,2
0,04	2° 17′ 30″,6	0,00004	0° 00′ 08″,3
5	2 51 53,2	5	0 00 10,3
6	3 26 15,9	6	0 00 12,4
0,07	4° 00′ 38″,5	0,00007	0° 00′ 14″,4
8	4 35 01,2	8	0 00 16,5
9	5 09 23,8	9	0 00 18,6

Пример. 7,325

$$
\begin{aligned}
7 &= 401^\circ\,04'\,13''{,}6\\
0{,}3 &= 17^\circ\,11'\,19''{,}4\\
0{,}02 &= 1^\circ\,08'\,45''{,}3\\
0{,}005 &= 0^\circ\,17'\,11''{,}3\\
\hline
7{,}325 &= 419^\circ\,41'\,29''{,}6
\end{aligned}
$$

Таблица 27

Пропорциональные части

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9
12	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
13	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4	11,7
14	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	8,4	9,8	11,2	12,6
15	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
16	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4
17	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3
18	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2
19	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	11,4	13,3	15,2	17,1
20	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0
21	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	14,7	16,8	18,9
22	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0	13,2	15,4	17,6	19,8
23	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1	18,4	20,7
24	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6
25	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
26	2,6	5,2	7,8	10,4	13,0	15,6	18,2	20,8	23,4
27	2,7	5,4	8,1	10,8	13,5	16,2	18,9	21,6	24,3
28	2,8	5,6	8,4	11,2	14,0	16,8	19,6	22,4	25,2
29	2,9	5,8	8,7	11,6	14,5	17,4	20,3	23,2	26,1
30	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0	27,0
31	3,1	6,2	9,3	12,4	15,5	18,6	21,7	24,8	27,9
32	3,2	6,4	9,6	12,8	16,0	19,2	22,4	25,6	28,8
33	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7
34	3,4	6,8	10,2	13,6	17,0	20,4	23,8	27,2	30,6
35	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0	24,5	28,0	31,5
36	3,6	7,2	10,8	14,4	18,0	21,6	25,2	28,8	32,4
37	3,7	7,4	11,1	14,8	18,5	22,2	25,9	29,6	33,3
38	3,8	7,6	11,4	15,2	19,0	22,8	26,6	30,4	34,2
39	3,9	7,8	11,7	15,6	19,5	23,4	27,3	31,2	35,1
40	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	36,0
41	4,1	8,2	12,3	16,4	20,5	24,6	28,7	32,8	36,9
42	4,2	8,4	12,6	16,8	21,0	25,2	29,4	33,6	37,8
43	4,3	8,6	12,9	17,2	21,5	25,8	30,1	34,4	38,7
44	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0	26,4	30,8	35,2	39,6
45	4,5	9,0	13,5	18,0	22,5	27,0	31,5	36,0	40,5

Продолжение табл. 27

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	4,6	9,2	13,8	18,4	23,0	27,6	32,2	36,8	41,4
47	4,7	9,4	14,1	18,8	23,5	28,2	32,9	37,6	42,3
48	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2
49	4,9	9,8	14,7	19,6	24,5	29,4	34,3	39,2	44,1
50	5,0	10 0	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0
51	5,1	10,2	15,3	20,4	25,5	30,6	35,7	40,8	45,9
52	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8
53	5,3	10,6	15,9	21,2	26,5	31,8	37,1	42,4	47,7
54	5,4	10,8	16,2	21,6	27,0	32,4	37,8	43,2	48,6
55	5,5	11,0	16,5	22,0	27,5	33,0	38,5	44,0	49,5
56	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0	33,6	39,2	44,8	50,4
57	5,7	11,4	17,1	22,8	28,5	34,2	39,9	45,6	51,3
58	5,8	11,6	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,4	52,2
59	5,9	11,8	17,7	23,6	29,5	35,4	41,3	47,2	53,1
60	6,0	12,0	18,0	24,0	30,0	36,0	42,0	48,0	54,0
61	6,1	12,2	18,3	24,4	30,5	36,6	42,7	48,8	54,9
62	6,2	12,4	18,6	24,8	31,0	37,2	43,4	49,6	55,8
63	6,3	12,6	18,9	25,2	31,5	37,8	44,1	50,4	56,7
64	6,4	12,8	19,2	25,6	32,0	38,4	44,8	51,2	57,6
65	6,5	13,0	19,5	26,0	32,5	39,0	45,5	52,0	58,5
66	6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4
67	6,7	13,4	20,1	26,8	33,5	40,2	46,9	53,6	60,3
68	6,8	13,6	20,4	27,2	34,0	40,8	47,6	54,4	61,2
69	6,9	13,8	20,7	27,6	34,5	41,4	48,3	55,2	62,1
70	7,0	14,0	21,0	28,0	35,0	42,0	49,0	56,0	63,0
71	7,1	14,2	21,3	28,4	35,5	42,6	49,7	56,8	63,9
72	7,2	14,4	21,6	28,8	36,0	43,2	50,4	57,6	64,8
73	7,3	14,6	21,9	29,2	36,5	43,8	51,1	58,4	65,7
74	7,4	14,8	22,2	29,6	37,0	44,4	51,8	59,2	66,6
75	7,5	15,0	22,5	30,0	37,5	45,0	52,5	60,0	67,5
76	7,6	15,2	22,8	30,4	38,0	45,6	53,2	60,8	68,4
77	7,7	15,4	23,1	30,8	38,5	46,2	53,9	61,6	69,3
78	7,8	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2
79	7,9	15,8	23,7	31,6	39,5	47,4	55,3	63,2	71,1
80	8,0	16,0	24,0	32,0	40,0	48,0	56,0	64,0	72,0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	8,1	16,2	24,3	32,4	40,5	48,6	56,7	64,8	72,9
82	8,2	16,4	24,6	32,8	41,0	49,2	57,4	65,6	73,8
83	8,3	16,6	24,9	33,2	41,5	49,8	58,1	66,4	74,7
84	8,4	16,8	25,2	33,6	42,0	50,4	58,8	67,2	75,6
85	8,5	17,0	25,5	34,0	42,5	51,0	59,5	68,0	76,5
86	8,6	17,2	25,8	34,4	43,0	51,6	60,2	68,8	77,4
87	8,7	17,4	26,1	34,8	43,5	52,2	60,9	69,6	78,3
88	8,8	17,6	26,4	35,2	44,0	52,8	61,6	70,4	79,2
89	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1
90	9,0	18,0	27,0	36,0	45,0	54,0	63,0	72,0	81,0
91	9,1	18,2	27,3	36,4	45,5	54,6	63,7	72,8	81,9
92	9,2	18,4	27,6	36,8	46,0	55,2	64,4	73,6	82,8
93	9,3	18,6	27,9	37,2	46,5	55,8	65,1	74,4	83,7
94	9,4	18,8	28,2	37,6	47,0	56,4	65,8	75,2	84,6
95	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	85,5
96	9,6	19,2	28,8	38,4	48,0	57,6	67,2	76,8	86,4
97	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5	58,2	67,9	77,6	87,3
98	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8	68,6	78,4	88,2
99	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5	59,4	69,3	79,2	89,1
100	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0
101	10,1	20,2	30,3	40,4	50,5	60,6	70,7	80,8	90,9
102	10,2	20,4	30,6	40,8	51,0	61,2	71,4	81,6	91,8
103	10,3	20,6	30,9	41,2	51,5	61,8	72,1	82,4	92,7
104	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0	62,4	72,8	83,2	93,6
105	10,5	21,0	31,5	42,0	52,5	63,0	73,5	84,0	94,5
106	10,6	21,2	31,8	42,4	53,0	63,6	74,2	84,8	95,4
107	10,7	21,4	32,1	42,8	53,5	64,2	74,9	85,6	96,3
108	10,8	21,6	32,4	43,2	54,0	64,8	75,6	86,4	97,2
109	10,9	21,8	32,7	43,6	54,5	65,4	76,3	87,2	98,1
110	11,0	22,0	33,0	44,0	55,0	66,0	77,0	88,0	99,0
111	11,1	22,2	33,3	44,4	55,5	66,6	77,7	88,8	99,9
112	11,2	22,4	33,6	44,8	56,0	67,2	78,4	89,6	100,8
113	11,3	22,6	33,9	45,2	56,5	67,8	79,1	90,4	101,7
114	11,4	22,8	34,2	45,6	57,0	68,4	79,8	91,2	102,6
115	11,5	23,0	34,5	46,0	57,5	69,0	80,5	92,0	103,5

Продолжение табл. 27

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
116	11,6	23,2	34,8	46,4	58,0	69,6	81,2	92,8	104,4
117	11,7	23,4	35,1	46,8	58,5	70,2	81,9	93,6	105,3
118	11,8	23,6	35,4	47,2	59,0	70,8	82,6	94,4	106,2
119	11,9	23,8	35,7	47,6	59,5	71,4	83,3	95,2	107,1
120	12,0	24,0	36,0	48,0	60,0	72,0	84,0	96,0	108,0
121	12,1	24,2	36,3	48,4	60,5	72,6	84,7	96,8	108,9
122	12,2	24,4	36,6	48,8	61,0	73,2	85,4	97,6	109,8
123	12,3	24,6	36,9	49,2	61,5	73,8	86,1	98,4	110,7
124	12,4	24,8	37,2	49,6	62,0	74,4	86,8	99,2	111,6
125	12,5	25,0	37,5	50,0	62,5	75,0	87,5	100,0	112,5
126	12,6	25,2	37,8	50,4	63,0	75,6	88,2	100,8	113,4
127	12,7	25,4	38,1	50,8	63,5	76,2	88,9	101,6	114,3
128	12,8	25,6	38,4	51,2	64,0	76,8	89,6	102,4	115,2
129	12,9	25,8	38,7	51,6	64,5	77,4	90,3	103,2	116,1
130	13,0	26,0	39,0	52,0	65,0	78,0	91,0	104,0	117,0
131	13,1	26,2	39,3	52,4	65,5	78,6	91,7	104,8	117,9
132	13,2	26,4	39,6	52,8	66,0	79,2	92,4	105,6	118,8
133	13,3	26,6	39,9	53,2	66,5	79,8	93,1	106,4	119,7
134	13,4	26,8	40,2	53,6	67,0	80,4	93,8	107,2	120,6
135	13,5	27,0	40,5	54,0	67,5	81,0	94,5	108,0	121,5
136	13,6	27,2	40,8	54,4	68,0	81,6	95,2	108,8	122,4
137	13,7	27,4	41,1	54,8	68,5	82,2	95,9	109,6	123,3
138	13,8	27,6	41,4	55,2	69,0	82,8	96,6	110,4	124,2
139	13,9	27,8	41,7	55,6	69,5	83,4	97,3	111,2	125,1
140	14,0	28,0	42,0	56,0	70,0	84,0	98,0	112,0	126,0
141	14,1	28,2	42,3	56,4	70,5	84,6	98,7	112,8	126,9
142	14,2	28,4	42,6	56,8	71,0	85,2	99,4	113,6	127,8
143	14,3	28,6	42,9	57,2	71,5	85,8	100,1	114,4	128,7
144	14,4	28,8	43,2	57,6	72,0	86,4	100,8	115,2	129,6
145	14,5	29,0	43,5	58,0	72,5	87,0	101,5	116,0	130,5
146	14,6	29,2	43,8	58,4	73,0	87,6	102,2	116,8	131,4
147	14,7	29,4	44,1	58,8	73,5	88,2	102,9	117,6	132,3
148	14,8	29,6	44,4	59,2	74,0	88,8	103,6	118,4	133,2
149	14,9	29,8	44,7	59,6	74,5	89,4	104,3	119,2	134,1
150	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0	90,0	105,0	120,0	135,0

Таблица 28

Постоянные величины и их логарифмы

	Число	Логарифм		Число	Логарифм
$3\pi^2$	29,61	1,4714	$\sqrt{\pi:2}$	1,253	0,0980
$4\pi^2$	39,48	1,5964	$\sqrt[3]{\pi:3}$	1,023	0,0099
$\pi:180$	0,01745	8,2418	$\sqrt{\pi:8}$	0,6267	9,7971
$\pi:360$	0,008727	7,9409	$\sqrt{2:\pi}$	0,7979	9,9019
$180:\pi$	57,30	1,7582	$\sqrt{3:\pi}$	0,9772	9,9900
$360:\pi$	114,6	2,0592	$\sqrt{8:\pi}$	1,596	0,2030
$(\pi:2)^2$	2,467	0,3922	$\sqrt{90:\pi}$	5,352	0,7285
$3\pi:2$	4,712	0,6732	$\sqrt[3]{\pi}$	$1,46\overline{5}$	0,1657
$4\pi:3$	4,189	0,6221	$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845	0,2661
$1:\pi^2$	0,1013	9,0056	$\sqrt[3]{\pi^2}$	2,145	0,3314
$1:\pi^3$	0,03225	8,5085	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6828	9,8343
$1:\pi^4$	0,01027	8,0116	$\sqrt[3]{2:\pi}$	0,8603	9,9346
$1:\pi^5$	0,003268	7,5143	e^2	7,389	0,8686
$1:\pi^6$	0,001040	7,0170	e^3	20,09	1,3030
$1:2\pi$	0,1592	9,2019	e^4	54,60	1,7372
$1:3\pi$	0,1061	9,0257	e^π	23,14	1,3644
$1:4\pi$	0,07958	8,9008	$e^{2\pi}$	$535,\overline{5}$	2,7288
$1:2\pi^2$	0,05066	8,7047	$e^{\pi:2}$	4,810	0,6822
$1:3\pi^2$	0,03377	8,5285	$1:e^2$	0,1353	9,1314
$1:4\pi^2$	0,02533	8,4036	$1:e^3$	0,04979	8,6971
$1:\sqrt{\pi}$	0,5642	9,7514	$1:e^4$	0,01832	8,2628
$1:\sqrt{2\pi}$	0,3989	9,6009	$\sqrt{e}$	1,649	0,2171
$1:2\sqrt{\pi}$	0,2821	9,4504	$\sqrt[3]{e}$	1,396	0,1448
$1:\pi\sqrt{\pi}$	0,1796	9,2543	$1:\sqrt{e}$	0,6065	9,7829
$1:\sqrt[3]{\pi}$	0,6828	9,8343	$1:e^\pi$	0,04321	8,6356
$1:\sqrt[3]{2\pi}$	0,5419	9,7339	$1:\sqrt[3]{e}$	0,7165	9,8491
$\sqrt{\pi}$	1,772	0,2485	$e^{-\pi/2}$	0,2079	9,3178
$\sqrt{2\pi}$	2,507	0,3992	$e^{-\pi}$	0,04321	8,6356
$2\sqrt{\pi}$	$3,54\overline{5}$	0,5496	$e^{-2\pi}$	0,001867	7.2711
$3\sqrt{\pi}$	5,317	0,7257	g	9,807	0,9915
$\pi\sqrt{2}$	4,443	0,6477	g^2	96,18	1,9831
$\pi\sqrt{\pi}$	5,568	0,7457	$\sqrt{g}$	3,132	0,4958
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,601	0,6629	$\sqrt{2g}$	4,429	0,6463
$\pi\sqrt[3]{\pi^2}$	6,739	0,8286	$1:g$	0,1019	9,0082
$\sqrt{\pi}:2$	0,8862	9,9475	$1:g^2$	0,0104	8,0170
$2:\sqrt{\pi}$	1,128	0,0523	$\sqrt{1:g}$	0,3193	1,5042

Метрическая система мер

Меры длины

	мк	*мм*	*см*	*дм*	*м*	*км*	Наименование
мк	1	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	микрон
мм	1000	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	миллиметр
см	10^{4}	10	1	0,1	0,01	10^{-5}	сантиметр
дм	10^{5}	100	10	1	0,1	10^{-4}	дециметр
м	10^{6}	1000	100	10	1	0,001	метр
км	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	1000	1	километр

Меры площади

	мм²	*см²*	*дм²*	*м²*	*а*	*га*	*км²*	Полное наименование
мм²	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	квадратный миллиметр
см²	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	квадратный сантиметр
дм²	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	квадратный дециметр
м²	10^{6}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	квадратный метр
а	10^{8}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	ар
га	10^{10}	10^{8}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	гектар
км²	10^{12}	10^{10}	10^{8}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	1	квадратный километр

32 5005

Меры объема и емкости

	мл ($см^3$)	*сл*	*дл*	*л*	*дкл*	*гл*	$м^3$	Наименование
мл ($см^3$)	1	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	миллилитр (кубический сантиметр)
сл	10	1	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	10^{-5}	сантилитр
дл	100	10	1	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	децилитр
л	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	литр
дкл	10^4	1000	100	10	1	0,1	0,01	декалитр
гл	10^5	10^4	1000	100	10	1	0,1	гектолитр
$м^3$	10^6	10^5	10^4	1000	100	10	1	кубический метр (кубометр)

4889

Меры веса (массы)

	мг	*сг*	*дг*	*г*	*кг*	*ц*	*т*	Наименование
мг	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	10^{-8}	10^{-9}	миллилиамм
сг	10	1	0,1	0,01	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}	сантилиамм
дг	100	10	1	0,1	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}	дециграмм
г	1000	100	10	1	0,001	10^{-5}	10^{-6}	грамм
кг	10^{6}	10^{5}	10^{4}	1000	1	0,01	0,001	килограмм
ц	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	100	1	0,1	центнер
т	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	1000	10	1	тонна

Таблица перевода десятичных дробей в двоичные*

	120	110	100	90	80	70
Стр. 1	4321 9876	54321 9876	54321 9876	54321 9876	54321 9876	54321 9876 543
	1 0	2 0	3 0	4 0	5 0	6 0
Стр. 0	1234 5 6789	1234 5 6789	1234 5 6789	1234 56789	1234 56789	1234 56789 12
0,000	(0000 0 0100	00011 0 0010	01001 1 0111	01001 01111	00011 01010	0
	3 1	2143	211	4231	4231	4 32
	1283 9645	7007	5469	3821	1283	9645
	1324	4442	3412	3412	3213	5
	7007	5469	3821	1283	9645	70

	20			
Стр. 1	4321 9876	543	0,1 $=0{,}0(0011)_2$	0,125 $=0{,}001_2$	0,625 $=0{,}101_2$
	1 0		10	10	10
Стр. 0	1234 56789	12	0,2 $=0{,}0(0110)_2$	0,250 $=0{,}010_2$	0,750 $=0{,}110_2$
			10	10	10
0,00	(0000 10100	0	0,3 $=0{,}0(1001)_2$	0,375 $=0{,}011_2$	0,875 $=0{,}111_2$
		1	10	10	10
	1283 9645	70	0,4 $=0{,}0(1100)_2$	0,500 $=0{,}100_2$	
			10	10	

---

* Таблица предложена А. А. Рывкиным; способ пользования см. на стр. 492

Третья строка таблицы представляет собой двоичную запись числа 0,001. После запятой стоят три нуля, за которыми начинается период. Период содержит 100 двоичных знаков, из которых в таблице записаны только 50. Следующие 50 знаков получаются из первых заменой всех нулей на единицы, а единиц на нули. Так как эти знаки в таблице не записаны, то скобка, означающая период, осталась незакрытой.

Вторая строка таблицы состоит из записанных подряд чисел от 1 до 62, а первая строка — из чисел 63—124, записанных в обратном порядке. Это количества тысячных.

Периоды двоичных представлений всех чисел от 0,001 до 0,999, исключая числа, кратные 0,005, могут быть получены из периода для числа 0,001 при помощи циклической перестановки его цифр. Числа в четвертой строке указывают номер цифры в периоде 0,001, с которой следует начать записывать период для расположенных над ними чисел в первой и во второй строках.

Первая строка называется строкой 1, а вторая — строкой 0. Это название имеет следующий смысл. Если найденная при помощи четвертой строки первая цифра периода совпадает с названием строки, то мы записываем эту цифру и все следующие за ней, а затем все цифры периода, поменяв нули на единицы, а единицы на нули, и, наконец, все цифры периода, стоящие перед той, с которой мы начали нашу запись. В результате мы получим период двоичного представления нужного нам числа.

Если же найденная цифра отлична от названия строки, то нам следует записать период, отличающийся от записанного в первом случае заменой единиц на нули, а нулей на единицы.

Найдем двоичное представление числа 0,632. Так как $0,632=0,625+0,007$, а $0,625=0,101_2$, то нам нужно найти двоичное представление числа 0,007. Число 7 находим во второй строке (строка 0). В четвертой строке этому числу соответствует число 36. Следовательно, запись периода для 0,007 нужно начинать с 36-го знака периода числа 0,001. На 36-м месте стоит 1, поэтому нужно менять нули и единицы на противоположные цифры. Получим 0,000(000011100101011 000000100000110001001001101 11010010...

Окончательно для 0,632 будет 0,101 (000011100101011 0000001000001100010010011011101001 0...

Для чисел, кратных 0,005 период двоичного представления будет короче — всего двадцать двоичных знаков. Его половина записана в левом нижнем углу таблицы. Принцип пользования тот же, что и для основной таблицы.

Например, двоичное представление числа 0,09 имеет вид 0,00(0101110000101000 1111). Мы начали с пятой цифры, все остальное можно проследить самостоятельно. Чтобы найти двоичное представление числа 0,005, 0,015, 0,035 и других, нужно записать период числа вдвое большего, взяв перед ним три нуля. Например, для 0,045 получим 0,000(0101110000101000 1111).

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(цифры указывают страницу)

А

Абсолютная величина 46, 230
— погрешность 310
Абсцисса 196
Аксиома 126
Алгебра 38
— символической логики 118
Алгебраическая линия 201
Алгебраические выражения 49
Алгебраическое дополнение 89
Алгорифм 328
Апофема многоугольника 142
Аргумент 46
— комплексного числа 46
Арифметические действия 11
Арифметическое среднее 30
Архимедова спираль 225
Асимптота гиперболы 215
Ассоциативность 41, 116
Астроида 224

Б

Безу теорема 56, 57
Бернулли неравенство 104
Бесконечно малые и бесконечно большие величины 242—244
Бином Ньютона 114, 115
— —, обобщенная формула 115
Биссектриса треугольника 131
— угла 129
Боковая грань пирамиды 161
— — призмы 160
Боковые поверхности тел (формулы) 165—166
Бочка 169

В

Векторы 227
— единичные 229
Верзьера Аньези 221
Вес 323
Виета теорема 72, 79
Возведение в степень 11
Восьмеричная система счисления 19
Восьмиугольник 145
Высота треугольника 131, 143
— сегмента 146
Вычитаемое 11
Вычитание векторов 228

— дробей десятичных 32
— — простых 26
— многочленов 55
— чисел 11
— — отрицательных 41
— — приближенных 313
Вычисления, средства вычислений 329

Г

Гармоническое среднее 31
Гаусса метод исключения неизвестных 84
Гексаэдр 162
Геометрическое среднее 30
Герона формула 134
Гипербола 213
—, асимптоты 215
—, вершины 214
—, директрисы 215
—, ось действительная 214
—, — мнимая 214
— равносторонняя 216
— сопряженная 216
—, уравнение 214
—, — касательной к гиперболе 215
—, фокальное расстояние 214
—, фокальные радиусы 214, 215
—, фокусы гиперболы 214
—, центр 214
—, эксцентриситет 214, 215
Гиперболоид 169
Гипоциклоида 224
Гомотетия 157
Горнера схема 56, 57
Град 328
Градус 128
Грань двугранного угла, многогранника, многогранного угла 160
График функции 201
Графическое дифференцирование 361
— интегрирование 362
— решение уравнений 360
Гюльдена теоремы 293

Д

Даламбера признак сходимости 299
Двоичное представление некоторых чисел 16
Двугранный угол 160
Двучлен 54
Декартов лист 224
Декартова система координат 196
Деление дробей десятичных 32
— — простых 26
— корней 51
— многочлена на одночлен 55
— многочленов 56
— — сокращенное (формулы) 55
— отрезка в данном отношении 198
— — в среднем и крайнем отношении 151
— — на равные части 151
— — пропорционально данным величинам 150
— степеней 50
— чисел 11, 21
— — отрицательных 39
— — приближенных 313
— —, признаки делимости 21
Делимое, делитель 11, 21
Делимость чисел, признаки 21
Делитель наибольший общий 22

— — —, порядок отыскания 23
Десятиугольник 145
Диагональ многоугольника 142
— четырехугольника 137
Диаметр круга 146
— шара (формула) 166
Дизъюнкция 118
Директриса гиперболы 215
— параболы 218
— эллипса 212
Дистрибутивность 41, 117
Дифференциал 262
—, правила его вычисления и основные формулы 263
—, свойства 264
— второго порядка 265
Дифференцирование 251—254
Длина пути 291
Додекаэдр 163
Дробь 24
— алгебраическая 59, 60—64
— —, разложение на простейшие 61
— двоичная, переход к десятичной 36
— десятичная 32
— —, переход к двоичной 37, 38
— —, обращение в простую 33
— периодическая 34, 35
— простая 24—27
— — правильная, неправильная, несократимая 25
— —, обращение в десятичную 33
— —, приведение к общему знаменателю 26
— —, сокращение, расширение 25
— —, сравнение дробей 25

Е

Евклида способ разыскания НОД 23
— схема — 60
Единица масштаба (масштабное расстояние) 38

З

Зависимость функциональная 231
Знаменатель 24
Значащая цифра, значность 311
Золотое сечение 151

И

Извлечение корня 11
Измерения непосредственные и косвенные 318
—, оценка точности их результатов 320
— равноточные 321
— неравноточные 323
—, ошибки функций измеренных величин 324
Икосаэдр 164
Индукция математическая 122
Интервал 233
Иррациональности, их исключения 52
Интеграл неопределенный 266
— —, таблица 276—285
— определенный 286
— —, свойства 288
Интегрирование приближенное 361

К

Кардано, формулы 74
Кардиоида 224
Касательная к кривой 249

— к двум окружностям, построение 153
— к окружности 146
— — —, построение 152
Квадрант 197
Квадрат 139
Квадратичное среднее 31
Квадратное уравнение 67, 71
— —, свойство корней 72
Квадратный трехчлен 73
Класс 14
Клин 162
Кольцо 146
—, его площадь 148
Комбинаторика 111
Коммутативность (переместительность) 41
Комплексные числа 42, 43
— —, алгебраическая форма, переход к тригонометрической 46
— —, возведение в степень 47
— —, деление 43, 47
— —, извлечение корня 47, 48
— —, сложение, вычитание 42, 43
— —, тригонометрическая форма 44
— —, умножение 42, 47
Конус 165, 166
Конхоида Никомеда 222
Конъюнкция 119
Координаты полярные 200
— —, переход к декартовым и обратно 200
— прямоугольные, декартовы 196, 197
— —, преобразование 199
— середины отрезка 198
— текущие 201
— центра тяжести материальных точек 198
— — — треугольной пластинки 198
Корень арифметический 49
— действительный 49
— многочлена 58
— n-ой степени 49
— уравнения 66, 72, 74, 76, 77
Косеканс 171
Косинус 170
Косинусов теорема 186
Котангенс 170
Коэффициент 54
— угловой 202
Коши теорема 31
Кратное 23
— общее наименьшее 24
Кривая выпуклая (вогнутая) 257
Кривизна 260
—, круг и центр ее 261
— средняя 259
—, ее радиус 260
—, формулы 261
Кривые второго порядка 209
— — —, свойства 220
Круг 146
—, площадь 148
—, радиус описанного круга 187
Куб 162
Кубическая парабола 221

Л

Лейбница признак сходимости 299
Лемниската Бернулли 222
Линейная функция 235
Линия алгебраическая 201
Линия прямая 202
— —, ее уравнение 202—206
Логарифмирование 109
Логарифмическая линейка 337

— спираль 225
— функция 235
Логарифмы 107—110
— десятичные 110
—, зависимость между логарифмами с различными основаниями 108
— натуральные 247
—, переход от десятичных логарифмов к натуральным 247
Логика символическая 118
Ломаная 128
Луч 128

М

Максимум, минимум функции 255, 256
Мантисса 111
Масштабное расстояние 38
Машины вычислительные 342
— —, арифмометр «Феликс» 342
— —, ВК-1 348
— —, ВК-2 350
— —, ВМП-2 полуавтоматическая 352
— —, ВМП-2 машина-автомат 356
Медиана 131
Метод проб 365
— хорд 365
— касательных 367
—неопределенных коэффициентов 61
Минута 128
Многогранники 160
— правильные 162—164
Многоугольник 142
— вписанный и описанный 142, 143
—, построение 154
— правильный 142
— —, соотношения 143—145
Многочлен 54
—, деление многочлена 56
—, приведение подобных членов 54
—, формулы сокращенного умножения и деления 55
Множества 115, 116
Множитель, разложение чисел на множители 22
—, вынесение из-под радикала 51
Модуль вектора 227
— действительного числа 46
— комплексного числа 46
Мольвейде формулы 186
Муавра формула 47

Н

Наибольший общий делитель 22, 23
Наименьшее общее кратное (НОК) 23, 24
Наименьший общий знаменатель 26
Натуральные числа 11
— логарифмы 247
Неравенства 99
Неравенство Бернулли 104
— первой степени (линейное) 100
— n-ой степени 101
— второй степени 102
Нормаль 249
Нуль, его свойство 41
Нулевая степень 49
Ньютона бином 114

О

Обелиск 161
Обратные тригонометрические функции 236, 248
Объемы тел (формулы) 160—167

— — вращения 168, 169 291
Одночлен, подобные одночлены 54
Окружность 146, 209
— вписанная и вневписанная 132
—, дуга и длина ее 148
— описанная 134
—, построение точек дуги 210
—, уравнение 209, 210
—, эксцентриситет 213
Октаэдр 163
Округление чисел 312
Определитель 2-го порядка 89
— 3-го порядка 89
Ордината 196
— начальная 202
Орты 229
Ортоцентр 134
Осевая симметрия 156
Основание конуса 165
— параллелепипеда 160
— пирамиды 161
— призмы 160
— усеченной пирамиды 161
— цилиндра 164
Основная теорема алгебры 78
— — арифметики 22
Оси координат 196
Ось действительная и мнимая 44
— симметрии 156
Отношение 24
Отрицание 119
Отрезок 128
Ошибки грубые 329
— систематические 329
— случайные 329

П

Парабола 217, 223
—, директриса 217, 218
—, длина дуги 219
— кубическая 221
— полукубическая 221
—, построение по точкам (способ проективных пучков) 219
—, уравнение 217, 218
—, — касательной к параболе 218
—, фокальный параметр 218
—, — радиус 218
—, фокус 217, 218
—, эксцентриситет 218
Параболическая бочка 169
Параболоид вращения 168
Параллелепипед 160
Параллелограмм 138
Параллельность плоскости и прямой 159
Параллельные плоскости 159
— прямые 129
— —, условие параллельности 207
— —, построение прямой, параллельной данной 149
Параллельный перенос 155
Паскаля треугольник 114
Переменная величина 231
Перестановки 111
— с повторяющимися элементами 112
Перпендикулярность прямой и плоскости 159
Перпендикулярные плоскости 159
— прямые 159
— —, условие перпендикулярности 207
— —, построение перпендикуляра 149, 151

Пересечение двух прямых 208
Период дроби 34
Пи (отношение длины окружности к диаметру) 148
Пирамида 161
— правильная 161
— усеченная 161
Пифагора теорема 135
Площадь (формулы) 134, 143—145, 148
— криволинейной трапеции 290
— поверхности тел вращения 290
Поверхности тел (формулы) 160, 161
Поворот осей 199
Погрешность абсолютная, относительная 310
Подобные члены 54
Полином 235
Полукубическая парабола 221
Полярная ось 200
Полярный радиус 200
Полюс 200
Порядок действий 12, 13
— линии 201
Последовательность 104
— возрастающая (убывающая) 105
— монотонная 105
Постоянная величина 231
Построения, элементарные (задачи) 149—153
Потенцирование 110
Предел функции 244
—, простейшие теоремы 245
Преобразования декартовых координат 199
—, приводящие к равносильной системе уравнений 70
—, — к равносильным уравнениям 68
—, — к уравнениям следствия 69
Приближенные вычисления 310
— числа, оценка их точности 312
— —, правила действий с ними 313
— формулы 316
Приближенное решение уравнений 365
Приведение подобных членов 54
Призма 160
— правильная 160
— прямая 160
— усеченная 161
Прогрессия арифметическая 105
— геометрическая 106
— — бесконечная 107
Проекция вектора на ось 229
Произведение многочленов 55
Производная 248
— алгебраической суммы 252
— вторая функции 250
— —, механический смысл 251
—, геометрический смысл 249
— логарифмическая 253
—, механический и физический смысл 250
— неявной функции 254
— n-го порядка от некоторых функций 255
— обратной функции 254
— общей показательной функции 254
— произведения 252
— сложной функции 252
— частного (дроби) 252

Промилле 36
Пропорции 27
— производные 29
Пропорция гармоническая 30
— непрерывная 29
— непрерывная гармоническая 30
Пропорциональные отрезки 148
Проценты 35
—, задачи 36
— сложные 36
Прямоугольник 139
Прямоугольный параллелепипед 160
Птолемая теорема 140
Пятиугольник, соотношения 144

Р

Работа силы 291
Равенство 65
— комплексных чисел 42
Равнозначность 119
Радиан 128
Радианная мера угла 128
Радиус окружности 146
— описанного круга 187
— вписанного и вневписанного кругов 187
Развертка окружности 226
Разложение многочленов на множители 58
— составных чисел 22
— дроби на простейшие 61
Размещения 112
Разность 11
Разряд 14
Расстояние между двумя точками 197
Ромб 139
Ряд
— знакопеременный 299
— знакочередующийся 299
— Маклорена 302
— —, таблица разложения некоторых функций 303
— с положительными членами 298
— степенной 302
— сходящийся и расходящийся 297
— тригонометрический 305
— функциональный 301
— Фурье 305
— —, таблица разложения некоторых функций 306—309
— числовой 296

С

Сегмент 146
—, высота, площадь 148
— шара, объем и поверхность 167
Секанс 171
Сектор 146
—, высота, площадь 148
— шара, объем 167
Секунда 128
Секущая 146
Симметрия осевая 156
— центральная 157
Синус 170
Синусов теорема 186
Система координат 196
— — декартова прямоугольная 196
— — левая 197
— — правая 196
— линейных уравнений, способы решения 84, 91, 93
—, содержащая уравнения 2-й степени 95, 96, 97, 98, 99
Система счисления 12
— — восьмеричная 19, 20
— — двоичная, 14, 16, 18

— — десятичная 13, 15, 18, 20
— — p-ичная 14
— — троичная 18, 19
— уравнений 67
Скалярное произведение 229
Скобки 12
Скорость мгновенная 250
— угловая 250
— химической реакции 250
Сложение дробей алгебраических 60
— — десятичных 32
— — простых 26
— векторов 228
— многочленов 55
— чисел 11
Сложный радикал 53
Смежные углы 129
Совокупность уравнений 67
Сокращение дробей 25
Сочетания 113
Спираль архимедова 225
— гиперболическая 225
— логарифмическая 225
Сравнение дроби 25, 26
Среднее арифметическое 30, 320
— взвешенное 31
— гармоническое 31
— геометрическое 30
— квадратичное 31
Средняя линия трапеции 138
Степень 49
— дробная 49
— многочлена 55
— нулевая 49
— отрицательная 49
—, правила действий со степенями 50
— уравнения 67
Стрелка дуги 148
Строфоида 225
Сумма некоторых числовых рядов 300
Сферическая бочка 169
Сходимость ряда 226
— — абсолютная 229
—, признак Даламбера 299
—, — Лейбница 299
Схема 327
Счеты 335

Т

Таблица значений 2^n 15
— — 2^{-n} 37
— — 3^n 19
— — 8^n 20
Тангенс 170
Тангенсов теорема 186
Тетраэдр 162
Тождество 66
Точка пересечения линий 201
Трансцендентное число 40
Трапеция 138
— равнобочная 138
Треугольник 130
— остроугольный 130
— Паскаля 114
—, площадь 134
—, подобие 158
—, построение 153
— прямоугольный 130, 135
— — равнобедренный 136
— — с углом в 30° 136
— равнобедренный 135
— равносторонний 137
—, решения 186—189
—, соотношения между элементами 143
— сферический 190
— — косоугольный 192
— — —, основные формулы 193—195
— тупоугольный 130
Трехлепестковая роза 226
Трехчлен 54

Тригонометрическая форма комплексного числа, переход к алгебраической форме 4,47
Тригонометрические уравнения 183
— — приводящиеся к алгебраическим 185
— — распадающиеся 184
Тригонометрические функции 170
— —, главные их значения 172
— — любого угла 170
— —, соотношения между ними 171
— —, формулы приведения 174
— — обратные 178
— — —, главные их значения 179
— — —, основные соотношения 180
Тригонометрический ряд 305

У

Угловой коэффициент 202, 204
Угол 128
— внешний 130
—, деление пополам 150
— между двумя хордами 147
— — касательной и секущей 147
— — плоскостями (двугранный) 160
— — прямыми 206
— — секущими 147
— — хордой и касательной 147
—, мера градовая 328
—, мера градусная и радианная 128
— многогранный 160
— наклона 202
— острый, тупой, прямой 129
— половинный, теоремы 186
— полный 129
— центральный 146
Углы вертикальные 129
— вписанные 147
— накрестлежащие 130
— односторонние 130
— смежные 129
— соответственные 130
Уменьшаемое 11
Умножение векторов 229
— дробей алгебраических 61
— — десятичных 32
— — простых 26
— многочленов 55
— сокращенное, формулы 55
— степеней 50
— чисел отрицательных 41
— — приближенных 313
Уравнение алгебраическое 65, 66
— биквадратное 76
— возвратное 76
— второй степени 67, 71, 95
— двучленное 78
— дробное 67, 79
— иррациональное 67, 79
— квадратное 67, 71—73
— —, теорема Виета 72
— кубичное 67, 73—75
— линейное 67, 71
— линии 201
— логарифмическое 82
— *n*-ой степени 78
— окружности 209, 210
— первой степени 67, 71
— — — с одним неизвестным 71
— — — с двумя неизвестными 91

— — — с тремя неизвестными 93
— показательное 82
— прямой общее 203, 204
— — в отрезках 204, 205
— —, параллельной оси OX, OY 203, 204
— — проходящей через две точки 203
— — — — начало координат 202, 203
— — с угловым коэффициентом 202, 204
— пучка прямых 203
— равносильное 67
— распадающееся 68
—, решение 66
—, решение графическое 360
—, — методом Гаусса 84
—, — приближенное, методом касательных 366
—, — —, — хорд 365
—, свойства корней 66, 72, 74, 76, 77
— симметрическое 75, 77
— следствия 69
— трансцендентное 66, 82
— третьей степени 73
— трехчленное 79
— целое 66, 67
— четвертой степени 75, 76
— эквивалентное 67
Уравнения, системы 67
—, — алгебраических уравнений 84
—, решение системы 67
Условия того, что три точки лежат на одной прямой 203

Ф

Факториал 7
Фигуры вращения 168
Фокальное расстояние 211
Фокальные радиусы 211, 218
Фокус параболы 217, 218
Фокусы гиперболы 214
— эллипса 211
Формула, определение 327
— сложного радикала 53
— сокращенного умножения и деления 55
Функции взаимообратные 236
— тригонометрические, суммы и разности двух углов 170—174
— — кратных углов 175
— — половинного угла 176
— —, произведение 176
— —, суммы и разности 177
Функция 231
— алгебраическая 234
— — дробная (рациональная) 235, 248
— — иррациональная 235, 248
— — целая 235, 248
—, возрастание и убывание 255
— линейная 71
— логарифмическая 235, 248
— монотонная 239
— неограниченная 242
—, непрерывность 247
— нечетная 241
—, область определения 233
— обратная тригонометрическая 236, 248
— ограниченная 242
— однозначная и многозначная 231
— периодическая 242
— показательная 235, 248
—, предел 244
— трансцендентная 235
— тригонометрическая 170, 235, 248

— —, знак в 4-х квадрантах 171
— —, обозначения 170
— — обратная
— — —, основные соотношения 180
— элементарная 234
— явная 234

Х

Характеристика (логарифма) 111
Хорда 146

Ц

Центр 146
— симметрии 158
— тяжести треугольника 134
— — трапеции 138
Цепная линия 223
Циклоида обыкновенная 222
— удлиненная 223
— укороченная 223
Цилиндр 164
— прямой круговой 164
— усеченный прямой круговой 164
— полый 165
Цилиндрическая подкова 165
Циссоида Диокла 222

Ч

Части, отыскание части числа по его целому 27
—, — — — в долях целого 27
—, — целого числа по его части 27
Частное 11
Четырехугольники 137—142
— вписанный 140
— описанный 141
Четырехлепестковая роза 227
Числа алгебраические 40
— взаимнопростые 23
— восьмеричные, таблицы сложения и умножения 19—21
— двоичные, таблицы сложения и умножения 16—18
— действительные или вещественные 38, 40, 42
—, действия над ними 41
— дробные 24
— иррациональные 39, 40
— комплексно-сопряженные 43
— комплексные, действия с ними 42—44, 47, 48
— —, тригонометрическая форма 44
— мнимые 42
— натуральные 11
— отрицательные 39
— —, действия с ними 41
— приближенные 310—315
— простые 22
— рациональные 24
— смешанные 25
— составные 22
— трансцендентные 40
— троичные, таблицы сложения и умножения 19
— четные и нечетные 22
Числитель 24
Число e 246
— π 148
Числовая ось 38
Числовые последовательности 104
Член многочлена 54
— пропорции крайний, средний 28
— — четвертый пропорциональный 28

Ш

Шар 166
— полый 167
Шаровой пояс 168

— сегмент 167
— сектор 167
Шестиугольник, соотношения 144

Э

Экстремум 255
Эксцентриситет гиперболы 214
— окружности 213
—параболы 218
— эллипса 212
Эллипс 211
—, вершины 211
—, директрисы 212
—, ось большая, малая 211
—, площадь 212
—, периметр 212
—, построение по точкам 213
—, связь с окружностью 212
—, уравнение касательной к эллипсу 212
—, фокальное расстояние 211
—, фокальные радиусы точки эллипса 211, 221
—, фокусы 211
—, центр 211
—, эксцентриситет 212

Альберт Анатольевич Рывкин,
Анатолий Залманович Рывкин,
Леонид Сергеевич Хренов

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

Для учащихся-заочников средних специальных учебных заведений

Редактор *Л. Г. Кузнецова*
Технический редактор *С. В. Швецов*
Корректоры *С. Н. Кошелева* и *М. Н. Мелейникова*

Сдано в набор 25/XI-1963 г. Индекс СП-5. Подписано к печати 8/XII-1964 г. Формат $70\times90^{1}/_{32}$. Объем 16,25 печ. л. Усл. печ. л. 19,02. Уч.-изд. л. 25,96 Т-18207. Заказ 5005. Тираж 100 000 экз. Цена 88 коп.
Издательство „Высшая школа"
Москва И-51, Неглинная ул., 29/14

Типография им. Анохина
Управления по печати при Совете Министров КАССР
г. Петрозаводск, ул. „Правды", 4